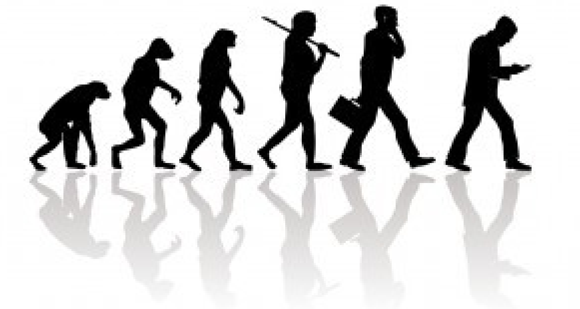
PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE



Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

DÉFINITION. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I si :
- F est dérivable sur I
- $\mathrm{F}'=f$.

Exemples :

• une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est …

• une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4x^3$ est …

• une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$) est …

PROPRIÉTÉ.

Si une fonction F est une primitive de f , alors toute fonction G définie sur I par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ ($k \in \mathbb{R}$) est une primitive de f sur I .

Démonstration : facile

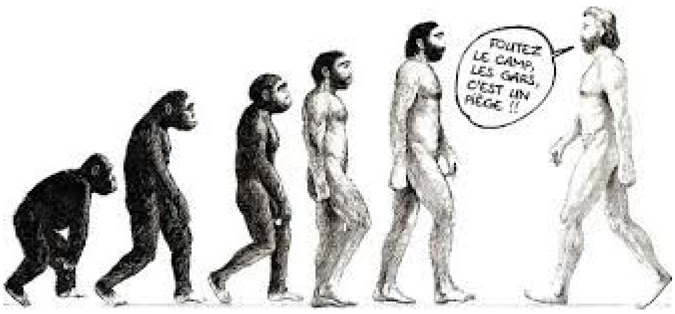
PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE.

Si F et G sont deux primitives de f , alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k \text{ .}$$

Démonstration :

PRIMITIVES USUELLES



Fonction f : $f(x)= \dots$	Une primitive F . $\mathrm{F}(x)= \dots$	Intervalle
k (où $k \in \mathbb{R}$)	$k\,x$	$\mathbb{R}$
x^n (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)		Si $n \geqslant 0$: $\mathbb{R}$ Si $n \leqslant -2$: $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$]0;+\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$\dfrac{u'}{u^2}$		u ne s'annule pas sur I
$u'u^n$ (où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)		Si $n<0$: u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		u est strictement positive sur I
$u'\mathrm{e}^u$		
$\dfrac{u'}{u}$		u ne s'annule pas sur I

Remarque : ***il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut pas trouver une formule explicite*** (qui utilise les fonctions usuelles précédemment rencontrées et les règles opératoires classiques : addition, multiplication, composition, etc.) ***pour les primitives***. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, que l'on rencontre en Terminale S (probabilités et statistiques).

En mathématiques (mais pas souvent en Terminale S), ces cas sont fréquents : on peut alors seulement utiliser des intégrales pour dire que la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a . On fait alors seulement des calculs approchés d'intégrales, mais heureusement les moyens informatiques permettent maintenant des calculs rapides et une très bonne précision.