SÉANCE DU MERCREDI 28 AVRIL 2021

Rappel : si question(s) sur cette séance, la visio est fixée au jeudi 29 avril de 14h00 à 15h00.
Le lien d'accès sera sur le site (pensez à vous connecter pour voir le lien).

I. Exercices à chercher

109 p386, 112 p387, 114 p387, 128 p388

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

• 109 p386

a. $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln|\mathrm{e}^x+1|]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1)-\ln 2 = \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$

b. $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$

donc $\mathrm{J}=1-\mathrm{I}$ *ie* $\boxed{\mathrm{J}=1-\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)}$.

• 112 p387

1. a. Si $0\leqslant x\leqslant 1$: $0^2\leqslant x^2\leqslant 1^2$ (fonction carré croissante sur $[0;1]$) *ie* $0\leqslant x^2\leqslant 1$
d'où : $1\leqslant 1+x^2\leqslant 2$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $[0;1]$: $1\geqslant \frac{1}{1+x^2}\geqslant \frac{1}{2}$.

b. D'où : $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ *ie* $[x]_0^1\geqslant\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1$ *ie* $1\geqslant\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}$

ie $\boxed{\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{K}\leqslant 1}$.

2. a. $1-x^2\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1-x^2+x^4 \Leftrightarrow (1-x^2)(1+x^2)\leqslant 1\leqslant(1-x^2+x^4)(1+x^2)$

$\Leftrightarrow 1-x^4\leqslant 1\leqslant 1+x^2-x^2-x^4+x^4+x^6$

$\Leftrightarrow -x^4\leqslant 0\leqslant x^6$

Or, ceci est évidemment vrai, puisque $-x^4=-(x^2)^2$ et $x^6=(x^3)^2$

d'où : $\boxed{1-x^2\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1-x^2+x^4}$.

b. On a donc : $\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 (1-x^2+x^4)\,\mathrm{d}x$

$\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\leqslant\mathrm{K}\leqslant\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$1-\frac{1}{3}\leqslant\mathrm{K}\leqslant 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

$\boxed{\frac{2}{3}\leqslant\mathrm{K}\leqslant\frac{13}{15}}$.

• **114 p387**

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$.

Alors : $0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{t^2}{n} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leqslant -\frac{t^2}{n} \leqslant 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant \mathrm{e}^0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant 1$.

b. En intégrant les inégalités : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t$

$$\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant [t]_0^1$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 1\ .$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{N}\to 0} \mathrm{e}^{\mathrm{N}} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, (u_n) est donc convergente et converge vers 1.

• **128 p388**

a. • On pose $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$; $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

D'après l'IPP : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \ldots = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{J}$ d'où $\mathrm{J} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{I}$.

• On pose $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$; $u'(x) = -\sin x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

D'après l'IPP : $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \ldots = -1 + \mathrm{I}$ d'où $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$.

b. $\mathrm{J} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{I}$ et $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$ donc : $\mathrm{J} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - (1 + \mathrm{J})$

$$2\mathrm{J} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}\ .$$

Puis : $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$ donc … (à détailler) $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.