I. Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p.
On répète cette épreuve de façon identique et indépendante jusqu'à l'apparition du premier succès.
On note X la variable aléatoire qui, à cette répétition d'épreuves, associe le rang du premier succès.

DÉFINITION

On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p.

On répète cette épreuve de façon identique et indépendante jusqu'à l'apparition du premier succès.

On note X la variable aléatoire qui, à cette répétition d'épreuves, associe le rang du premier succès.

On dit que X suit une loi ***géométrique*** de paramètre p.

PROPRIÉTÉ

Si X suit une loi ***géométrique*** de paramètre p, alors : $\mathrm{p}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$.

Démonstration :

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p est $\dfrac{1}{p}$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

Pour tous réels t et h positifs : $\mathrm{p}_{X>t}(X>t+h)=\mathrm{p}(X>h)$.

Démonstration :

Cette propriété est appelée propriété de durée de vie sans vieillissement ou propriété d'absence de mémoire. Autrement dit, la probabilité pour que, dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier succès arrive après la n-ième épreuve est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier succès arrive après la n-ième épreuve, sachant que les m premières épreuves ont donné lieu à un échec.

II. Loi à densité : la théorie

DÉFINITION

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Une ***variable aléatoire*** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ. On la note souvent X.

Une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de ℝ est dite ***continue***.

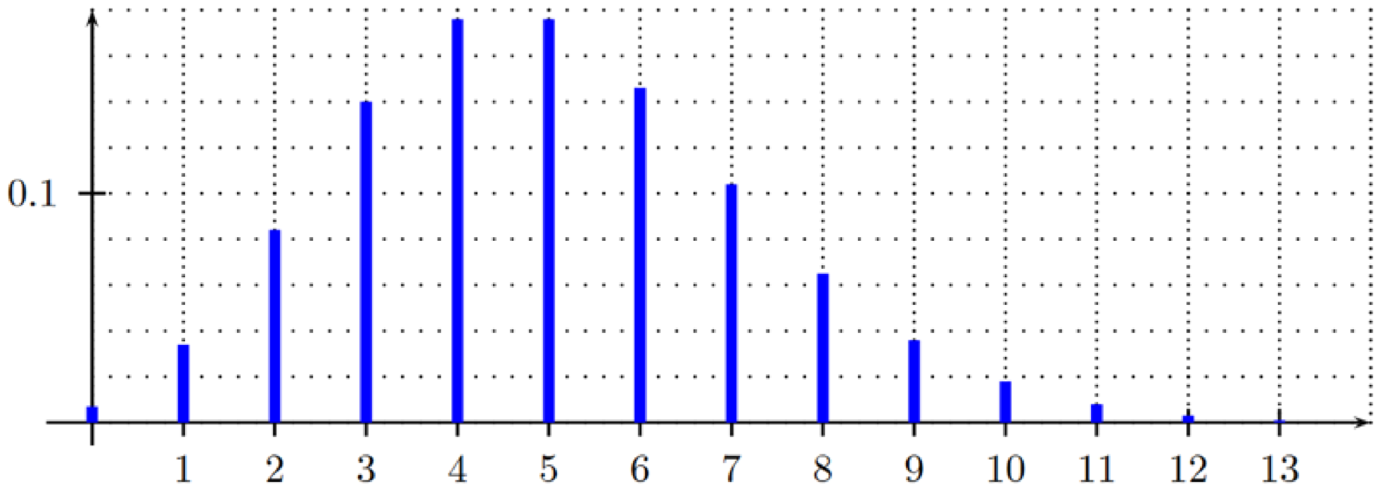
Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité est généralement donnée sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Ou une formule, par exemple pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$: $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité vérifie : pour tout i, $\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)\geqslant 0$; et $\sum_i \mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)=1$.

On peut par ailleurs représenter une telle loi par un diagramme en bâtons :



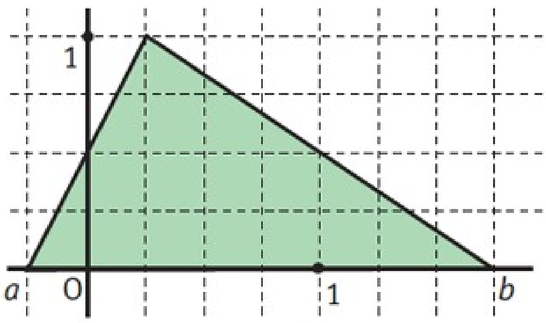
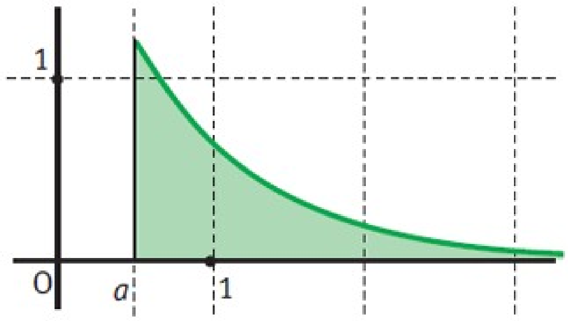
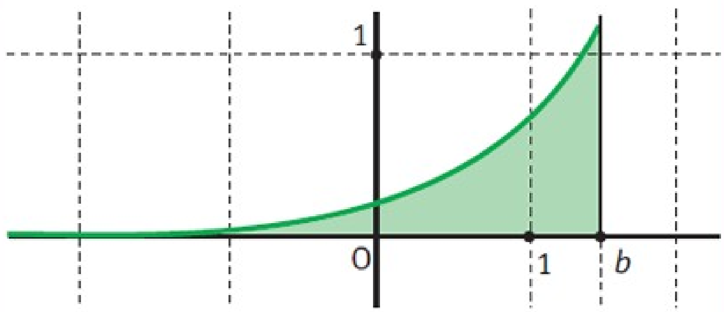
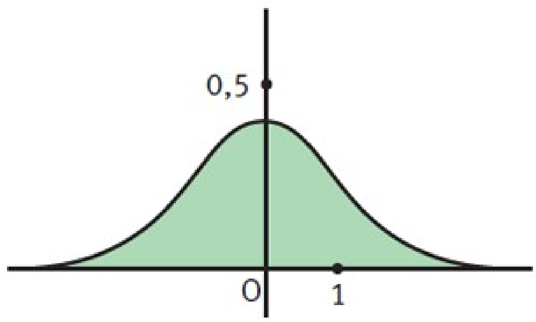
Par analogie, pour une v.a.r. continue, on utilisera des fonctions, continues à valeurs positives, et les probabilités des intervalles seront données par des aires, c'est-à-dire par des intégrales.

DÉFINITION

Soit I un intervalle. Une fonction f définie sur I est appelée ***fonction de densité*** sur I lorsque :

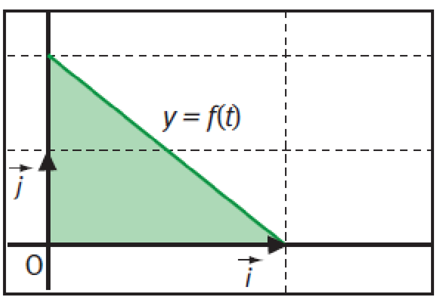
- f est continue sur I (*sauf éventuellement en un nombre fini de points*)
- f est positive sur I
- $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

La troisième condition correspond à plusieurs cas différents suivant la nature de l'intervalle I.
Dans le tableau de la page suivante, a et b désignent des nombres réels.

$I=[a\,;b]$	$I=[a\,;+\infty[$
$\int_a^b f(t)\,dt=1$  	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=1$ 
$I=]-\infty\,;b]$	$I=]-\infty\,;+\infty[$
$\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\int_y^b f(t)\,dt\right)=1$  	$\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\int_y^0 f(t)\,dt\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$ 

Source de l'image : http://www.academie-en-ligne.fr/Ressources/7/MA02/AL7MA02TEPA0213-Sequence-08.pdf

Attention :



Une fonction de densité peut prendre des valeurs supérieures à 1 :

f n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité.

DÉFINITION

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et I un intervalle.

Soit X une variable aléatoire continue de densité f , définie sur Ω et à valeurs dans I.

Pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité de l'événement { X ∈ J } est l'aire du domaine suivant : $\{\ \mathrm{M}(x\,;y)\ ,\ x\ \in \mathrm{J}$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\ \}$.

Autrement dit : $\mathrm{p}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On admet que l'on peut prolonger la loi de probabilité à toute union finie d'intervalles de telle sorte que l'on ait la propriété :

PROPRIÉTÉ

Si J et J' sont deux unions d'intervalles inclus dans I, on a :

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} \in \mathrm{J} \cup \mathrm{J}') = \mathrm{p}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) + \mathrm{p}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}') .$$

On obtient alors facilement :

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité *f* sur I.

- $\forall\, a \in \mathrm{I}$: $\mathrm{p}(\mathrm{X}=a)=0$.
- Pour tous réels a et b de I tels que $a<b$:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} \in [a\,;b]) = \mathrm{p}(\mathrm{X} \in]a\,;b]) = \mathrm{p}(\mathrm{X} \in [a\,;b[) = \mathrm{p}(\mathrm{X} \in]a\,;b[) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité *f* sur I.

La ***fonction de répartition*** de X est la fonction F définie sur I par : $\mathrm{F}(x) = \mathrm{p}(\mathrm{X} \leqslant x)$.

Dans le cas d'une v.a.r. discrète, l'espérance est définie par : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)$.

Dans le cas d'une v.a.r. continue, cette somme n'a pas de sens, car la variable peut prendre une infinité de valeurs. On prolonge alors naturellement cette définition :

DÉFINITIONS

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité f sur I.

L'***espérance*** de X est[1] : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$. Sa ***variance*** de X : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$.

1 Bien sûr dans le cas où cette intégrale existe. Idem pour la variance.

Si par exemple $\mathrm{I}=[2\,;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_2^x x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ n'existe pas, alors $\int_{\mathrm{I}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ n'a aucun sens et l'espérance n'existe pas.

III. Les lois uniformes

III.1 La loi uniforme standard

PROPRIÉTÉ

La fonction constante f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[0;1]$ si sa densité est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$. On note X ~ $\mathcal{U}([0;1])$.

EXEMPLE C1

On choisit un nombre au hasard dans $[0;1]$.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 0,2 et 0,25 ?

2. L'expression « compris entre 0,2 et 0,25 » peut être interprétée avec des inégalités strictes.

Cela changera-t-il le résultat obtenu ?

III.2 Loi uniforme sur [a ; b]

PROPRIÉTÉ

La fonction constante f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[a;b]$ si sa densité est la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$. On note X ~ $\mathcal{U}([a;b])$.

EXEMPLE C2

On choisit un nombre au hasard dans $[0;100[$. Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 90 et 100 ?

PROPRIÉTÉ

L'espérance d'une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration : facile… Il suffit de calculer $\displaystyle\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ

La variance d'une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Démonstration :

IV. Les lois exponentielles

De nos jours, nous avons tous une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître[2]. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit la loi du vieillissement ou de l'usure : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50 ou 60 ans.
La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement.
Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t.
Par exemple, pour un verre en cristal, la probabilité d'être cassé dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication, de son âge.

Source : http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/IMG/pdf_La_loi_exponentielle.pdf

2 Sur l'espérance de vie, lire ce superbe article de François Sauvageot : http://images.math.cnrs.fr/Esperance-de-vie.html

PROPRIÉTÉ

Soit λ un réel strictement positif.

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité.

Démonstration :

• $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la composée de deux fonctions continues sur $[0;+\infty[$, donc elle est continue sur $[0;+\infty[$. Par produit, *f* est donc continue également.

• $\lambda>0$ et $\mathrm{e}^{-\lambda x}>0$ donc *f* est positive

• Pour tout réel *t* : $\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}-(-\mathrm{e}^0)=-\mathrm{e}^{-\lambda t}+1$.

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t=-\infty$ donc par composition de limites : $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}=0$

et donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda t}+1=1$.

DÉFINITION

Soit λ un réel strictement positif

On dit qu'une variable aléatoire X suit ***une loi exponentielle de paramètre λ*** lorsque sa fonction de densité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

PROPRIÉTÉ

Soit λ un réel strictement positif.

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors sa fonction de répartition est :

$$\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Démonstration :

PROPRIÉTÉ DURÉE DE VIE SANS VIEILLISSEMENT

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Pour tous réels t et h positifs : $\mathrm{p}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X}\geqslant t+h)=\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant h)$.

Démonstration :

$$\mathrm{p}_{\mathrm{X}\geqslant t}(\mathrm{X}\geqslant t+h)=\frac{\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant t\ \cap\ \mathrm{X}\geqslant t+h)}{\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant t)}=\frac{\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant t+h)}{\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant t)}=\frac{1-\mathrm{p}(\mathrm{X}<t+h)}{1-\mathrm{p}(\mathrm{X}<t)}=\frac{1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}\right)}{1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda h}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant h)=1-\mathrm{p}(\mathrm{X}<h)=1-\int_0^h \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-[-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^h=1-\left(-\mathrm{e}^{-\lambda h}-(-\mathrm{e}^0)\right)=1+\mathrm{e}^{-\lambda h}-1=\mathrm{e}^{-\lambda h}$$

Cette propriété est appelée propriété de durée de vie sans vieillissement.
En effet, si on interprète X comme la durée de vie d'un appareil, cette égalité signifie que la probabilité que l'appareil fonctionne encore au-delà du temps $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t est égale à la probabilité que l'appareil fonctionne au-delà du temps h.

PROPRIÉTÉ

Une v.a.r. X représente une durée de vie sans vieillissement si, et seulement si, elle suit une loi exponentielle.

<u>Démonstration</u> : admise, mais facile.

Il suffit de poser $\mathrm{G}(t)=\mathrm{p}(\mathrm{X}\geqslant t)$ et de montrer que $\mathrm{G}(t+h)=\mathrm{G}(t)\times\mathrm{G}(h)$, avec $\mathrm{G}(0)=1$.
On reconnaît alors l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle…
(bien sûr, il faut supposer que G est dérivable).
Voir https://mathemathieu.fr/1333.

Une loi exponentielle modélise donc souvent la durée de vie d'un ***phénomène sans mémoire***, ou ***sans vieillissement***, ou ***sans usure*** : le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

Le paramètre λ peut représenter le nombre de fois qu'un événement survient durant un laps de temps donné.

PROPRIÉTÉ

L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

<u>Démonstration</u> :

Soient λ un réel strictement positif et g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que : $g(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{1}{\lambda}g'(t)$.

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}+1\right)$.

3. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}$.

APPLICATIONS CLASSIQUES

La radioactivité

Un atome radioactif est un atome instable qui, au bout d'un certain temps, se désintègre, c'est-à-dire se transforme en un atome d'un autre type. En 1902, Rutherford et Soddy découvrent la loi de désintégration radioactive qui peut s'énoncer de la façon suivante : la probabilité qu'un atome ne soit pas désintégré à l'instant $t + s$, sachant qu'il est « vivant » à l'instant t, ne dépend pas de t.

Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle. Le paramètre λ s'appelle alors la ***constante de désintégration***. La durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ s'appelle le ***temps caractéristique***.

La loi des grands nombres permet de dire que la concentration d'atomes radioactifs va suivre la même loi.

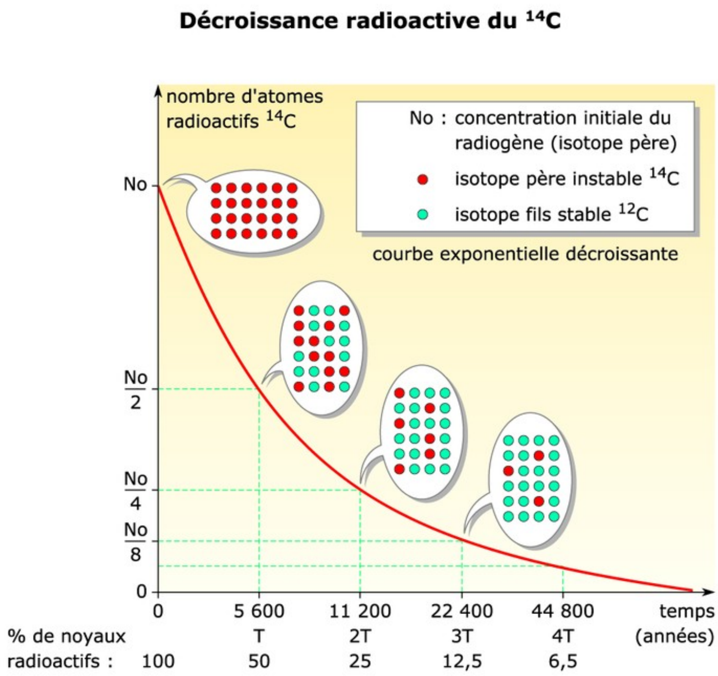
La médiane correspond au temps T nécessaire pour que la population passe à 50 % de sa population initiale et s'appelle la ***demi-vie*** ou période.

Exercice : démontrer que la médiane est égale à $\frac{\ln(2)}{\lambda}$, c'est-à-dire que $p(X>T)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow T=\frac{\ln 2}{\lambda}$.

Un noyau radioactif est un noyau instable subissant spontanément une transformation appelée désintégration, permettant un retour à la stabilité. Il ne « vieillit » donc pas puisqu'il se transforme sans subir de modifications progressives. Autrement dit, un noyau radioactif créé il y a 10 ans a autant de chance de se désintégrer qu'un noyau identique venant d'être créé.

Pour un noyau donné, le phénomène de désintégration est donc aléatoire et imprévisible.

Par contre, l'évolution statistique d'une population de noyaux répond à une loi de probabilité bien déterminée !



Si on note N_0 le nombre de noyaux radioactifs tous identiques initialement présents dans l'échantillon.

Après un temps t, la population a diminué (on la note $N(t)$).

Le nombre moyen de désintégration est proportionnel à la population existante $N(t)$ et à la durée de mesure Δt :

$$\Delta N = -\lambda \times N(t) \times \Delta t$$

avec λ un coeff. de proportionnalité appelé ***constante radioactive****.*

Si la durée tend vers 0, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

La solution de cette équation différentielle est alors : $N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$.

On retrouve la loi exponentielle.

La constante (en secondes) $\tau=\frac{1}{\lambda}$ est la ***durée de vie moyenne*** *d'un noyau.*

Source de l'image : https://static1.assistancescolaire.com/ele/images/t_t103i03z.jpg

Les files d’attente (avions, guichets, programmes, etc.)

L’arrivée de clients dans une file d’attente est souvent modélisée par une loi exponentielle.

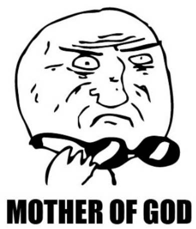
La théorie des files d’attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des files d’attente, ou queues. Une queue est nécessaire et se créera d’elle-même si ce n’est pas anticipé, dans tous les cas où l’offre est inférieure à la demande, même temporairement. Elle peut s’appliquer à différentes situations : gestion des avions au décollage ou à l’atterrissage, attente des clients et des administrés aux guichets, ou bien encore stockage des programmes informatiques avant leur traitement.

Ce domaine de recherches, né en 1917, des travaux de l’ingénieur danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague entre 1909 et 1920, étudie notamment les systèmes d’arrivée dans une queue, les différentes priorités de chaque nouvel arrivant, ainsi que la modélisation statistique des temps d’exécution.

Dans ce contexte des files d’attente, la distribution exponentielle donne une assez bonne approximation des temps de service (par exemple avant l’arrivée des premiers secours auprès des victimes d’accidents).

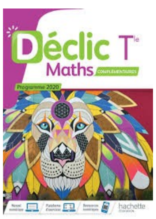
Autres exemples d’utilisation de la loi exponentielle :
- le temps d’attente du premier appel pour un standard téléphonique
- la durée de vie d’un composant électronique
- le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau
- le temps écoulé entre deux accidents de voiture dans lequel un individu donné est impliqué
- le temps entre deux arrivées successives dans un fast-food, à la caisse d’un supermarché, etc.
- le temps écoulé entre deux défauts de crédit pour une banque
- le temps écoulé entre deux catastrophes aériennes

REMARQUE :



Les manuels scolaires regorgent de ***situations modélisées à tort par une loi sans vieillissement*** : temps d’attente à un standard téléphonique, à un guichet ou à la caisse d’un supermarché.
En effet, la probabilité d’attendre 2 minutes pour quelqu’un ayant déjà attendu 10 minutes est inférieure à la probabilité d’attendre 2 minutes pour quelqu’un qui vient juste d’arriver ; il y a donc vieillissement…

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



• Fiche bilan → p.238

• QCM 17 questions corrigées → p.239