Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
« BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points]

Dans la revue *Lancet Public Health*[1], les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 ».
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

e. Déterminer le plus petit entier *n* tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19. Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité. La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie : il s'agit donc d'un vrai positif. La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie : il s'agit donc d'un vrai négatif.
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes : sa sensibilité est de 0,8 ; sa spécificité est de 0,99. On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020 et on note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Réaliser un arbre des probabilités avec les événements I et T, et le compléter.

2. Montrer que $P(T) = 0{,}05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99. Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe : quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

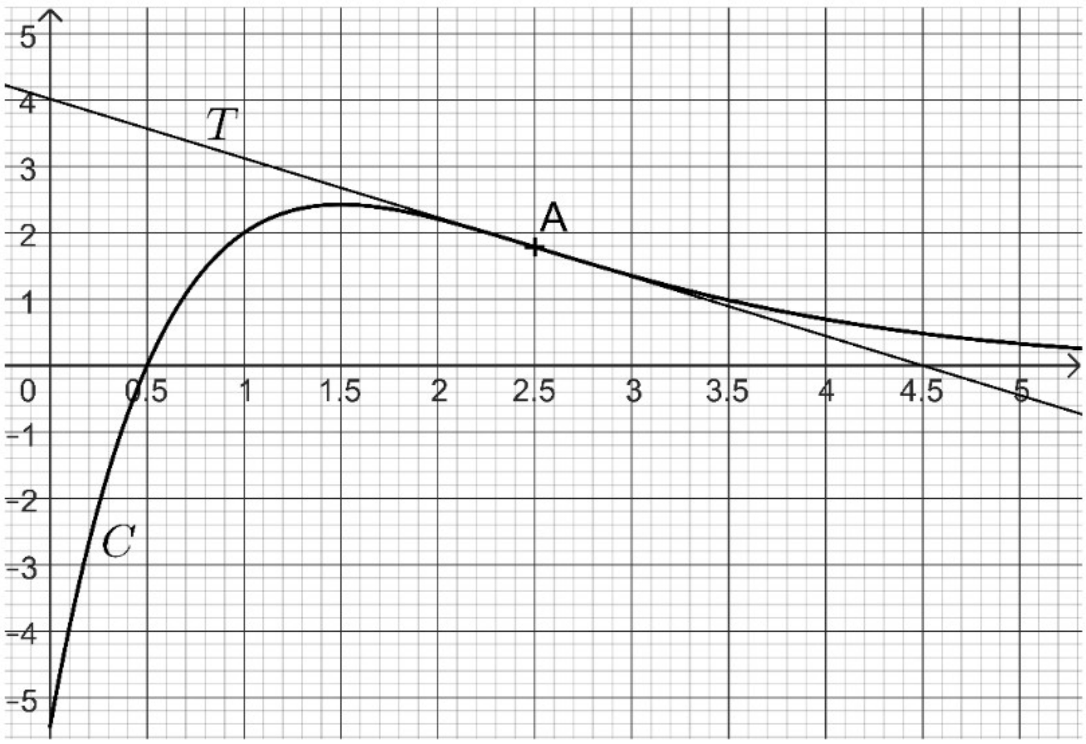
---
1 Source : https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext

EXERCICE 2 [5 points]

Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$, représentée par la courbe C ci-dessous.

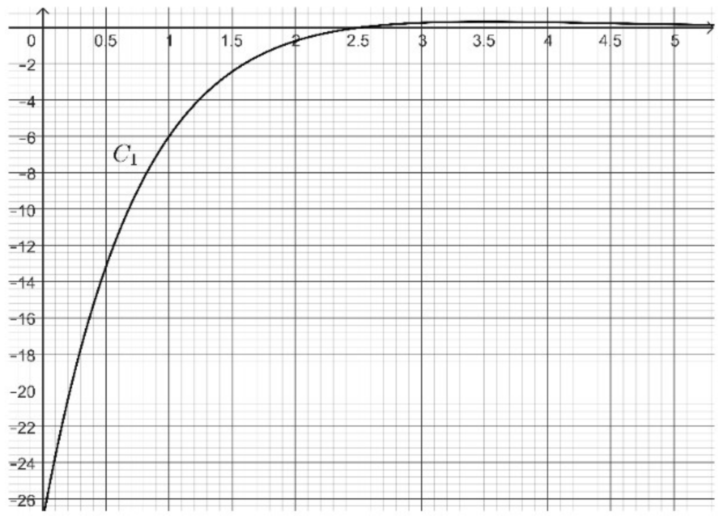
La droite T est tangente à la courbe C au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



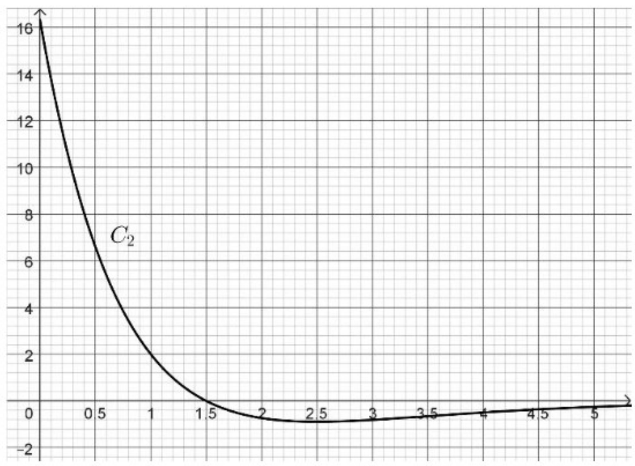
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Que semble présenter la courbe C au point A ?

3. La dérivée $f\,'$ et la dérivée seconde $f\,''$ de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous. Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

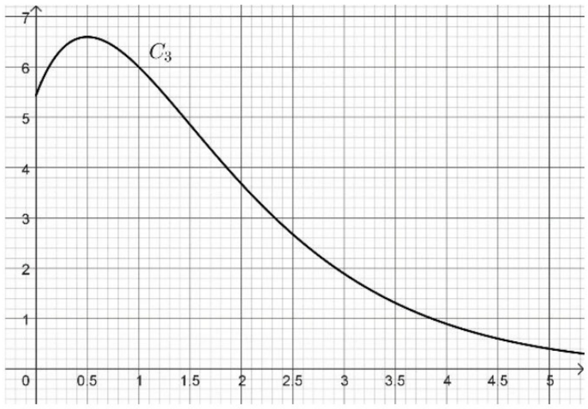


Courbe C_1



Courbe C_2

4. La courbe C_3 ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0;+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$, est définie par : $f(x)=(4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x)=(-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

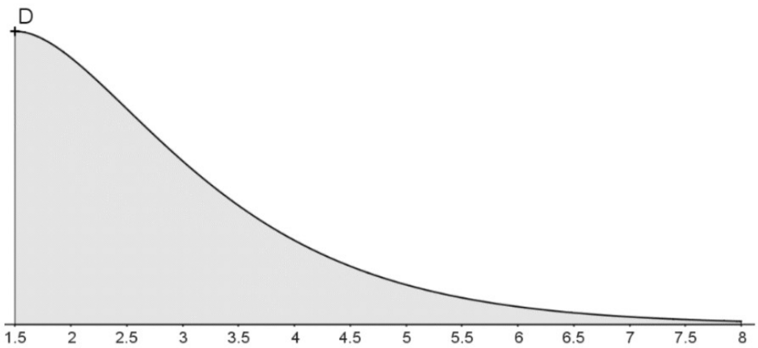
2. On considère une fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

b. On admet que $\mathrm{F}(x)=(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale : $\mathrm{I}=\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

EXERCICE 3 [5 points]

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n>1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude la suite (u_n) dans le cas $1<a<2$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-2=u_n(u_n-2)$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=(u_n-1)(u_n-2)$.

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n<2$.

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a=2$

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.
Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit u(2,1) et u(2,2) dans la console Python.

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a=2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\ln(u_n-1)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=1+\mathrm{e}^{2^n\times\ln(a-1)}$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 [5 points]

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandée. Pour répondre, indiquer sur la copie <u>le numéro</u> de la question et <u>la lettre</u> de la réponse choisie.

1. On considère une fonction h définie et continuer sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-contre.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Elle vérifie la propriété :

a. H est croissante sur $\mathbb{R}$ **b.** H est négative sur $]-\infty;1]$

c. H est croissante sur $]-\infty;1]$ **d.** H est positive sur $]-\infty;0]$

2. Soit deux réels a et b avec $a<b$. On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ et qui s'annule en un réel α. Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0, 001 est :

a.
```
def racine(a,b):
  while abs(b-a)>=0.001:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<0:
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

b.
```
def racine(a,b):
  m=(a+b)/2
  while abs(b-a)<=0.001:
    if f(m)<0:
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

c.
```
def racine(a,b):
  m=(a+b)/2
  while abs(b-a)>=0.001:
    if f(m)<0:
      a=m
    else:
      b=m
  return m
```

d.
```
def racine(a,b):
  while abs(b-a)>=0.001:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<0:
      b=m
    else:
      a=m
  return m
```

3. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.

On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}$ **b.** $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ **c.** $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$ **d.** $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

4. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\frac{a}{b+\mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.

On sait que $g(0)=2$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t)=3$. Les valeurs de a et b sont :

a. $a=6$ et $b=2$ **b.** $a=4$ et $b=\frac{4}{3}$ **c.** $a=4$ et $b=1$ **d.** $a=2$ et $b=3$

5. La suite (w_n) est définie par $w_1=2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1}=\frac{1}{n}w_n$.

a. La suite (w_n) est géométrique

b. $w_5=\frac{1}{15}$

c. La suite (w_n) converge vers 0

d. La suite (w_n) n'admet pas de limite

The End