Nom : **Prénom** : **Classe** : T^{le}OME

le mercredi 9 octobre 2024

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 45 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 7 minutes

1. On considère les matrices suivantes : $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \dfrac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On note $P = CD$ et $P = (p_{i,j})$. Calculer (en détaillant) les coefficients $p_{1,2}$ et $p_{2,3}$.

2. Écrire la matrice $(h_{i,j})$ de dimension 5×4 définie par $h_{i,j} = i + j - 1$ si i est impair, $-i$ sinon.

EXERCICE 2 ≈ 7 minutes

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^3 - 7A^2 = 9I_3 - 15A$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Démontrer que A est inversible et déterminer l'inverse de A, noté A^{-1}.

EXERCICE 3 ≈ 7 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant : $\begin{cases} -2x - 3z = 1 + 3y \\ -x - 2y + 5z = -2 \\ 4x - 2y = 3z \end{cases}$.

EXERCICE 4 ≈ 20 minutes

Dans cet exercice, si vous souhaitez calculer l'inverse d'une matrice, on vous demande de justifier en utilisant vos connaissances de cours. Autrement dit, la calculatrice n'est pas utile.

On définit les deux suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 2 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 9y_n + 5}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{3x_n - 5y_n + 3}{2} \end{cases}.$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ on a donc $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. On cherche une matrice colonne C telle que $C = AC + B$. Déterminer l'unique matrice C vérifiant cela.

2. Par la suite, on admettra que : $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose, pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - C$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = AV_n$.

3. On note $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

On admet que :

- $A=PDP^{-1}$ et pour tout entier naturel non nul n : $A^n=PD^nP^{-1}$
- $\forall\, n\in\mathbb{N},\ V_n=A^nV_0$
- $\forall\, n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de A^n et en déduire x_n et y_n en fonction de n uniquement.