



DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure 40 minutes.

Calculatrice AUTORISÉE en mode examen.

EXERCICE 1

≈ 40 min

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [1; 2]$.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

4. a. Démontrer que la suite (u_n) converge.

b. Déterminer la limite de (u_n) .

5. a. Démontrer que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ diverge vers $+\infty$.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant (programmé en Python) pour qu'il retourne la valeur de S_n après que l'utilisateur ait saisi la valeur de n .

```
n = int(input("Saisir n : "))
u =
s = u
k = 0
while      :
    u =
    s =
    k = k + 1
print("La valeur de S_n est :", s)
```

EXERCICE 2

≈ 10 min

En utilisant la définition de la limite d'une suite, démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{5n+7} = +\infty$.

EXERCICE 3

≈ 25 min

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (x_n) définie sur \mathbb{N} par : $x_n = \frac{-2n^4 - 2n^3 + 11}{2n^3 + 2n^2 + 7}$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $n^2 - n + 3 > 0$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + \sqrt{n^2 - n + 3} + 11$.

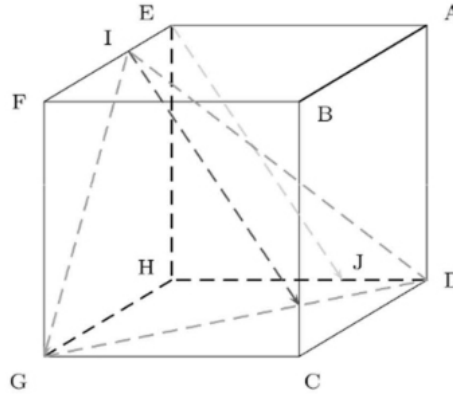
→

3. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^n = 0$.

EXERCICE 4

≈ 20 min



ABCDEFGH est un cube. Les points I et J vérifient : $\vec{EI} = \frac{1}{3} \vec{EF}$ et $\vec{DJ} = \frac{1}{3} \vec{DH}$.

On se place dans le repère $(G; \vec{GC}, \vec{GH}, \vec{GF})$.

1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées de E, J, G, D et I.
b. En déduire les coordonnées des vecteurs \vec{EJ} , \vec{GD} et \vec{GI} .
2. Déterminer par le calcul deux nombres réels x et y tels que : $\vec{EJ} = x \vec{GD} + y \vec{GI}$.
3. a. Démontrer que $E \notin (GDI)$.
b. Conclure rigoureusement que (EJ) est strictement parallèle au plan (GDI) .

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE