Nom : **Prénom** : **Classe** : T[le]OME

le jeudi 6 novembre 2025

Note :

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 40 minutes. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

On définit les deux suites (x_n) et (y_n) par :

$$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{2}{3}x_n-\dfrac{1}{6}y_n+3 \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{2}y_n+4 \end{cases}.$$

En posant $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ on a donc $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{A}\,\mathrm{U}_n+\mathrm{B}$ avec $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. On cherche une matrice colonne C telle que $\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{B}$. Déterminer l'unique matrice C vérifiant cela.

2. Par la suite, on admettra que : $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. On pose, pour tout entier naturel n : $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n-\mathrm{C}$.

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{AV}_n$.

3. On note $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Vérifier que $\mathrm{A}=\mathrm{P}\,\mathrm{D}\,\mathrm{P}^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\mathrm{A}^n=\mathrm{P}\,\mathrm{D}^n\,\mathrm{P}^{-1}$.

4. On admet que :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{V}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{D}^n=\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, déterminer l'expression de A^n et en déduire x_n et y_n en fonction de n uniquement.