

Nom : Prénom :



RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
« BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.



Avant de composer, le candidat s'assurera que
le sujet comporte bien 5 pages numérotées.

EXERCICE 1 [6 points]

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A – Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à 0,4 ;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement deux années.
b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B – Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparaît plus pertinente :

- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5 ;
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est 0,3.

On considère que l'année de référence est 2023.

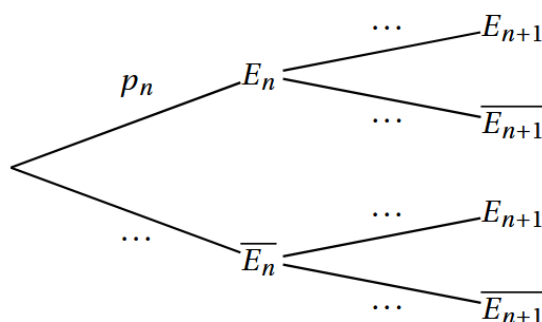
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année 2023 + n » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n .

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel.

Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,3$.

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. a. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n) .

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n) .

d. En déduire la convergence de la suite (p_n) .

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n) .

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n .

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n)$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n) .

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 [4 points]

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

Affirmation 1 : Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 2 : 47 poignées de mains ont été échangées.

3. Un cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.

Affirmation 3 : $N = 82$.

4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4 : Si f est positive sur $\mathbb{R}$, et si pour tout réel x , $f'(x) - f(x) = 3e^{0,4x}$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 [5 points]

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

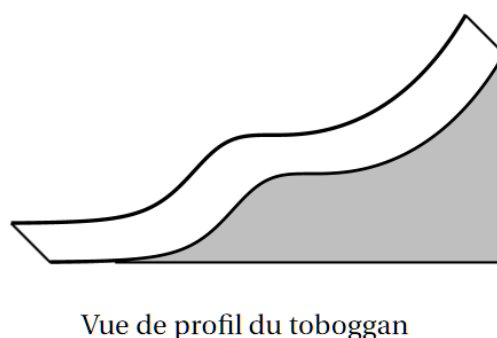
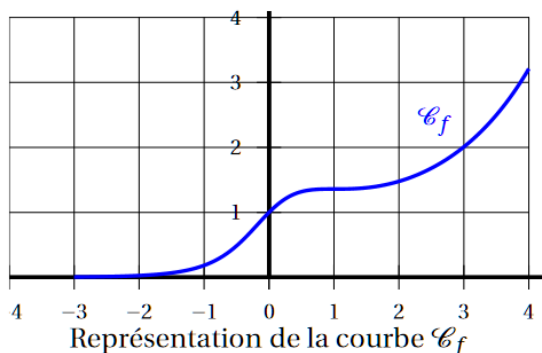
1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près. Justifier rapidement.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3; 4]$.
b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$: $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ».

EXERCICE 4 [5 points]

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(4; -4; 4), \quad B(5; -3; 2), \quad C(6; -2; 3), \quad D(5; 1; 1).$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. On admet que le plan (ABC) admet un unique vecteur normal $\vec{n}(1; b; c)$, où $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer b et c .

3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Démontrer que : $DH = 2\sqrt{2}$.

4. a. On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, où B est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.

Démontrer que le volume de la pyramide ABCD est égal à 2.

b. On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{\sqrt{42}}{2}$.

En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

The End.

Choisis ton camp !



bonne présentation
résultats soulignés
pas de fautes d'orthographe
méthodes maîtrisées



aucune présentation
résultats non soulignés
des fautes d'orthographe horribles
des erreurs de calcul