T°S SPÉ

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIOPHANTIENNE

MÉTHODE DE RÉSOLUTION

On note (E) l'équation à résoudre : $a\,x+b\,y=c$.

À savoir (facile à démontrer) :
si l'équation admet des solutions, alors PGCD(a, b) divise c.

Donc : Si PGCD(a, b) ne divise pas c, l'équation n'admet **pas de solutions**.

Si PGCD(a, b) divise c :

ÉTAPE 1 : se ramener à une équation avec des entiers premiers entre eux

Diviser l'équation par ce PGCD pour obtenir une équation équivalente du type :

(E') $a'x+b'y=c'$

avec a' et b' premiers entre eux.

elle existe d'après le théorème de Bézout

ÉTAPE 2 : recherche d'une solution particulière

Méthode 1 : en testant des entiers simples, déterminer une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de (E').

Méthode 2 :

– faire l'algorithme d'Euclide avec a' et b'
– « remonter » cet algorithme afin de déterminer les coefficients de Bézout pour déterminer une solution particulière de $a'x+b'y=1$
– multiplier cette solution particulière par c' pour en déduire une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de (E').

ÉTAPE 3 : formes des solutions (avec le théorème de Gauss)

Si (E') admet une solution $(x\,;y)$ alors : $\begin{cases} a'x+b'y=c' \\ a'x_0+b'y_0=c' \end{cases}$.

Par soustraction, obtenir : $a'(x-x_0)=b'(y_0-y)$.

Donc $a' \mid b'(y_0-y)$.

a' et b' étant premiers entre eux, utiliser le théorème de Gauss pour obtenir :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z},\quad x=x_0+b'k \quad \text{et} \quad y=y_0-a'k \ .$$

ÉTAPE 4 : vérification (réciproque)

Vérifier que si $x=x_0+b'k$ et $y=y_0-a'k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ce sont bien des solutions de (E').

ÉTAPE 5 : conclusion

Les solutions de (E) sont …

EXEMPLE 1

On note (E) l'équation à résoudre : $\boxed{600x+124y=12}$.

Algorithme d'Euclide pour 600 et 124 :

$$\begin{aligned}600&=124\times4+104\\124&=104\times1+20\\104&=20\times5+4\\20&=4\times5+0\end{aligned}$$

Donc : PGCD(600,124) = 4.

ÉTAPE 1 :

(E) ⇔ $\dfrac{600x+124y}{4}=\dfrac{12}{4}$ ⇔ $\boxed{150x+31y=3}$. On note **(E')** cette dernière équation.

Par construction, 150 et 31 sont premiers entre eux. Résoudre (E) revient à résoudre (E').

ÉTAPE 2 :

Algorithme d'Euclide pour 150 et 31 :

$$\begin{aligned}150&=31\times4+26\\31&=26\times1+5\\26&=5\times5+1\\5&=1\times5+0\end{aligned}$$

Coefficients de Bézout :

$$\begin{aligned}26&=150-31\times4\\5&=31-26\times1\\&=31-(150-31\times4)\times1\\&=150\times(-1)+31\times(1+4)\\&=150\times(-1)+31\times5\\1&=26-5\times5\\&=150-31\times4-(150\times(-1)+31\times5)\times5\\&=150\times(1+5)+31\times(-4-25)\\&=600\times6+124\times(-29)\end{aligned}$$

Donc $(6;-29)$ est une solution particulière de $150x+31y=1$.

Alors $(6\times3;-29\times3)$ *ie* $(18;-87)$ est une solution particulière de (E').

ÉTAPE 3 :

<u>Si (E') admet une solution</u> $(x;y)$ alors : $\begin{cases}150x+31y=3\\150\times18+31\times(-87)=3\end{cases}$.

Par soustraction : $150(x-18)+31(y+87)=0$ donc $150(x-18)=31(-y-87)$ (*).

Donc $150 \mid 31(-y-87)$.

Or, 150 et 31 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss : $150 \mid -y-87$.

D'où : $\exists\, k\in\mathbb{Z}$, $-y-87=150k$ *ie* $\boxed{y=-87-150k}$.

Alors d'après (*) : $150(x-18)=31\times150k$ d'où $x-18=31k$ *ie* $\boxed{x=18+31k}$.

ÉTAPE 4 :

Réciproquement, si $x=18+31k$ et $y=-87-150k$ alors :

$150x+31y=150(18+31k)+31(-87-150k)=150\times18-31\times87=3$ donc $(x;y)$ est bien une solution de (E').

→

ÉTAPE 5 :

Conclusion : les solutions de (E) sont les couples $(18+31k\,;-87-150k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 2

On note (E) l'équation à résoudre : $600x+124y=10$.

Algorithme d'Euclide pour 600 et 124 :

(1)	$600=124\times4+104$
(2)	$124=104\times1+20$
(3)	$104=20\times5+4$
(4)	$20=4\times5+0$

Donc : PGCD(600,124) = 4.
Or, 4 ne divise par 10, donc (E) n'admet aucune solution*.

* autre façon de rédiger : supposons par l'absurde que (E) admette des solutions : 4 | 600 et 4 | 124 donc, par combinaison linéaire, 4 | 10. Or ceci n'est pas le cas, donc notre hypothèse est fausse.

À VOUS DE JOUER

Résoudre les trois équations diophantiennes suivantes :

$3x+7y=24$ $\qquad$ $1820x+858y=208$ $\qquad$ $1820x+585y=209$