MATRICES
~ EXERCICES ~

Exercice 1

Soit $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 11 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

Calculer $A+2B$ et $3B-5A$.

Vérifier les résultats à la calculatrice.

Exercice 2

Pour les matrices suivantes, calculer les produits AB et BA :

a) $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 11 & 0{,}5\end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 7{,}5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 2 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Compléter : $AB=\begin{pmatrix}\dots & 9 & 4\\ 8 & 3 & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Que peut-on conjecturer pour A^n pour tout entier n strictement positif ?

2. Démontrer votre conjecture.

Exercice 5

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

Vérifier que $A^3=0$ (où 0 est matrice nulle d'ordre 3).

Une telle suite est dite ***nilpotente*** *d'ordre 3.*

Exercice 6

Les identités remarquables suivantes sont-elles vraies pour les matrices ?

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$? $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$?

Exercice 7

Un maraîcher approvisionne en poireaux, épinards et carottes une AMAP qui constitue des paniers pour ses clients. Celle-ci propose trios paniers différents dans lesquels figurent ces trois légumes. Les masses (en kg) de chacun de ces trois légumes sont données dans le tableau ci-dessous.

	Panier A	Panier B	Panier C
Poireaux	1	2	1,5
Épinards	1	1,5	1
Carottes	2,5	3	2

Cette semaine, le maraîcher a produit 52 kg de poireaux, 42 kg d'épinards et 92 kg de carottes.
Déterminer combien de paniers de chaque type on pourra constituer.

Source : Hyperbole Term S spécialité (2012), éd. Nathan

Exercice 8

Résoudre les systèmes suivants :

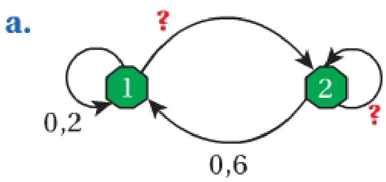
a) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ \frac{1}{2}x+3y=-8 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 3x+5y+3z=7 \\ 2x+5y+8z=-1 \\ x+8y+5z=4 \end{cases}$;

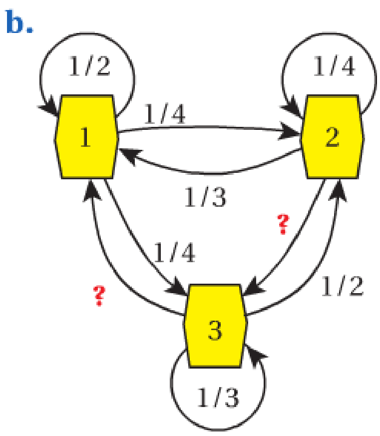
c) $\begin{cases} 14-y+x=0 \\ 12y=7x+3z \\ 11x-19y=8-5z \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2a+3b+5c-4d=1 \\ a+2b+2c+d=2 \\ -6a+b+5c+2d+3=0 \\ a+3b+4c+2d=0{,}5 \end{cases}$.

Exercice 9

On considère une marche aléatoire entre les sommets d'un graphe.
Pour chacun des graphes suivants :

- compléter les probabilités manquantes ;
- écrire la matrice de transition pour la marche aléatoire
  (sommet de départ en colonne, sommet d'arrivée en ligne).



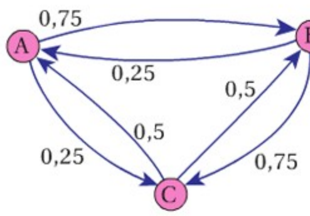


Source : Odysée Tle S (2012), éd. Hatier

Exercice 10

On considère un mobile qui à chaque instant :

- suit les arêtes du graphe probabiliste ci-dessous avec la probabilité 0,8 ;
- ou choisit au hasard de façon équiprobable un des sommets du graphe (y compris celui sur lequel il est) avec la probabilité 0,2.



On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne donnant la probabilité que le mobile occupe le sommet A, B ou C, n instants après son départ.

1. Déterminer une relation entre X_{n+1} et X_n. (On fera intervenir des matrices carrée et colonne que l'on explicitera.)

2. S'il part de A, donner la probabilité que le mobile soit en C après 4 pas.

3. S'il part de B, donner la probabilité que le mobile soit à nouveau en B après 5 pas.

Exercice 11

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Montrer que cette situation s'apparente à une marche aléatoire dont on donnera la matrice de transition.

À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculer la probabilité qu'un individu soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé ;
- au départ, il est non malade et non immunisé ;
- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Sources : Odysée Tle S (2012), éd. Hatier

Exercice 12

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quitte celle-ci tandis que 20 % du reste de l'île vient y habiter.

On néglige les autres échanges.

En 2012, il y avait 12 000 habitants dans la capitale et 30 000 dans le reste de l'île.

On note cet état par la matrice ligne :

$$P_0 = (12\,000 \quad 30\,000)$$

a) Représenter ce processus évolutif par un graphe pondéré à deux sommets :

C (capitale) et R (reste de l'île).

b) Écrire la matrice de transition M.

c) Calculer l'état de la population de l'île au bout d'un an, deux ans, trois ans.

d) Avec la calculatrice, conjecturer l'état de la population de l'île à long terme.

Source : Hyperbole Term S spécialité (2012), éd. Nathan

Exercice 13

Pour observer le vieillissement de la population féminine jeune d'un pays, on divise la population des femmes de moins de 45 ans en 3 classes :
les femmes de moins de 15 ans, les femmes d'âge entre 15 à 30 ans et les femmes de 30 à 45 ans .
On note tous les 15 ans dans un vecteur colonne la répartition de ces femmes dans les 3 catégories.
On suppose que la matrice de passage d'une répartition à une autre tous les 15 ans est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer à quoi correspondent les 4 coefficients non-nuls de cette matrice.

2. On suppose à présent qu'à un moment donné, la répartition est de 1 million de femmes par catégorie.

a. Donner la répartition dans les 3 catégories de la population féminine dans 60 ans.

b. Comparer cette répartition avec celle d'une population où le 2^e et le 3^e coefficient de la ligne 1 seraient échangés.

Ce type de modèle d'étude de la dynamique d'une population structurée en âge est dû à P.H. Leslie (1945) ; il est l'un des plus utilisés en dynamique des populations et en démographie.

Source : Odysée Tle S (2012), éd. Hatier

Exercice 14

Une certaine espèce de scarabées ne vit au maximum que trois ans. Une année (année 0), on considère une famille de ces scarabées, composée de trois groupes d'âges :

- x scarabées sont dans leur première année ;
- y scarabées sont dans leur deuxième année ;
- z scarabées sont dans leur troisième année.

On note cette composition à l'aide de la matrice ligne :

$$X_0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Pour cette espèce de scarabées, on a observé que :

- la moitié des scarabées meurent durant leur première année ;
- parmi les survivants, les deux tiers meurent durant leur deuxième année ;
- ceux qui restent la troisième année donnent naissance à 6 scarabées avant de mourir.

1. Déterminer, en fonction de x, y et z, la composition de la famille au bout d'un an.

2. On note X_n la matrice ligne donnant la composition de la famille au bout de n années.

a) Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = X_n A$.

b) Vérifier que $A^3 = I_3$ où I_3 est la matrice identité.

c) En déduire la répartition des groupes d'âges, en fonction de x, y et z, après n années (distinguer les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, pour k nombre entier naturel).

Source : Hyperbole Term S spécialité (2012), éd. Nathan

Exercice 15

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Démontrer que la suite (X_n) est géométrique, puis en déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. On pose : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible. Avec la calculatrice, préciser sa matrice inverse P^{-1} et vérifier que :

$$A = PDP^{-1}.$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n, puis étudier la convergence des deux suites.

Exercice 16

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ -12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\frac{1}{2}A^3 - 2A^2 + \frac{5}{2}A$.

b) Un professeur demande à Karine d'en déduire la matrice A^{-1} inverse de la matrice A.
Voici la réponse de Karine et un commentaire de son professeur.

En mettant A en facteur dans l'expression du a), j'obtiens :

$A \times \left(\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}\right) = I$, or $A \times A^{-1} = I$,

donc $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}$

Mais voici ce qu'affiche ma calculatrice

```
(1/2)*[A]²-2*[A]
+5/2
ERR:DATA TYPE
1:Quit
2:Goto
```

C'est normal, ce ne sont pas les mêmes objets mathématiques

Expliquer le commentaire du professeur et proposer une solution correcte à cet exercice.

Sources : Hyperbole Term S spécialité (2012), éd. Nathan

Exercice 17

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales.
Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois sortes d'image, a déclaré mensongère la publicité :

" Les images sont également réparties dans les boîtes. "

Que penser de ce qu'il affirme ?
Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte de céréales.

On appelle X_n le vecteur-colonne donnant la répartition la n-ième semaine, c'est-à-dire le vecteur dont la première composante est le nombre de personnes ayant exactement 1 image, la deuxième deux images et la troisième trois images.

1. Expliquer pourquoi $X_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Expliquer, à l'aide de la première partie, ce que représente la matrice suivante : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

3. Comment obtenir la répartition lors de la deuxième semaine ?

4. A l'aide de la calculatrice déclencher ce processus, puis commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.