INTERVALLE(S) DE CONFIANCE : EXERCICES CORRECTION

Exercice 1 *Faire du cinéma ou faire de la politique*

1. On pose $n=100$ et $f=0{,}53$.
$n\geqslant 30$; $nf=53$ et $n(1-f)=47$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$
On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion p de la population qui est favorable à cet emplacement :
$\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0{,}53-\dfrac{1}{\sqrt{100}};0{,}53+\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]=[0{,}43;0{,}63]$.
On ne peut donc pas conclure que la majorité de la population est favorable à cet emplacement.

2. L'intervalle de confiance devient : $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0{,}53-\dfrac{1}{\sqrt{500}};0{,}53+\dfrac{1}{\sqrt{500}}\right]=[0{,}4852;0{,}5748]$.
On ne peut toujours pas conclure que la majorité de la population est favorable à cet emplacement.

3. $0{,}53-\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}}<0{,}03 \Leftrightarrow \sqrt{n}>\dfrac{1}{0{,}03} \Leftrightarrow n>\left(\dfrac{1}{0{,}03}\right)^2$
Or, $\left(\dfrac{1}{0{,}03}\right)^2\approx 1111{,}11$ donc à partir d'un sondage qui interroge 1112 personnes, on peut estimer, au niveau de confiance de 95 %, que la majorité de la population est favorable à cet emplacement

Exercice 2 *Des résultats qui ne doivent rien au hasard*

1. On pose $n=45$ et $f=\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}$.
$n\geqslant 30$; $nf=25$ et $n(1-f)=20$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$.
Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 :
$\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{\sqrt{45}};\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{\sqrt{45}}\right]\approx[0{,}4064;0{,}7047]$.
Le jury décide de modifier le barème car $0{,}4064<0{,}9$.

2. On pose $n=36$ et $f=\dfrac{25}{36}$.
$n\geqslant 30$; $nf=25$ et $n(1-f)=11$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$.
Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 :
$\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\dfrac{25}{36}-\dfrac{1}{\sqrt{36}};\dfrac{25}{36}+\dfrac{1}{\sqrt{36}}\right]\approx[0{,}5277;0{,}8612]$.
Le jury ne doit donc pas accepter le nouveau barème.

3. $\left(f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
$\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{n}}{2}\geqslant\dfrac{1}{0{,}2} \Leftrightarrow \sqrt{n}\geqslant 10 \Leftrightarrow n\geqslant 100$
donc pour que l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 ait une amplitude d'au plus 0,2, il faudrait que la taille de l'échantillon dépasse 100 personnes.

Exercice 3 *Au coude-à-coude*

$\left(f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(f-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance (niveau de confiance de 95 %) est $\frac{2}{\sqrt{n}}$: $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}\geqslant\frac{1}{0{,}01} \Leftrightarrow \sqrt{n}\geqslant 200 \Leftrightarrow n\geqslant 40\,000$.

Donc pour obtenir une estimation aussi précise des intentions de vote, il faudrait un échantillon d'au moins 40 000 personnes.

Exercice 4 *Satisfait ou remboursé*

On pose $n=140$ et $f=\frac{99}{140}$.

$n\geqslant 30$; $nf=99$ et $n(1-f)=41$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion p de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème :

$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{99}{140}-\frac{1}{\sqrt{140}};\frac{99}{140}+\frac{1}{\sqrt{140}}\right]\approx[0{,}6226;0{,}7917]$.

Exercice 5 *Germer ou ne pas germer…*

1. On pose $n=200$ et $f=\frac{185}{200}$.

$n\geqslant 30$; $nf=185$ et $n(1-f)=15$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) du taux de germination p_a du lot de semences de l'année : $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{185}{200}-\frac{1}{\sqrt{200}};\frac{185}{200}+\frac{1}{\sqrt{200}}\right]\approx[0{,}8542;0{,}9958]$.

2. On pose $n=200$ et $f=\frac{150}{200}$.

$n\geqslant 30$; $nf=150$ et $n(1-f)=50$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) du taux de germination p_b du lot de semences de l'année précédente :

$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{150}{200}-\frac{1}{\sqrt{200}};\frac{150}{200}+\frac{1}{\sqrt{200}}\right]\approx[0{,}6792;0{,}8208]$.

3. Les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut donc conclure à une différence de taux de germination entre les semences des deux origines. Il faudra alors les semer séparément.

Exercice 6 *Ne tirer aucune conclusion*

Première approche : $\frac{37}{120}\approx 0{,}31$ et $\frac{320}{1002}\approx 0{,}32$ donc on peut penser que les deux joueurs sont proches, avec un léger avantage pour Julie.

Approche avec le cerveau allumé : on pose $n=120$ et $f=\frac{37}{120}$.

$n\geqslant 30$; $nf=37$ et $n(1-f)=83$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion d'atteinte de la cible pour Johan :

$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{37}{120}-\frac{1}{\sqrt{120}};\frac{37}{120}+\frac{1}{\sqrt{120}}\right]\approx[0{,}2170;0{,}3997]$.

De même pour Julie : $\left[\frac{320}{1002}-\frac{1}{\sqrt{1002}};\frac{320}{1002}+\frac{1}{\sqrt{1002}}\right]\approx[0{,}2877;0{,}3510]$.

Les deux intervalles se recoupent, on ne peut donc rien conclure. Sauf peut-être que Julie ferait mieux de se calmer, faut pas déconner… Johan ne dira rien, car il drague certainement Julie… À vous d'imaginer la suite de l'histoire.

Plus sérieusement, c'est quoi un bon tireur de fléchettes ? Quelqu'un qui atteint souvent la cible ? N'importe quoi, il vaut peut-être mieux l'atteindre moins souvent mais obtenir le maximum de points. De plus, à quoi bon comparer des statistiques aussi différentes, et alors que Julie a lancé 1 002 fléchettes et Johan seulement 120. C'est du grand n'importe quoi ! Cet exercice est nul, il m'énerve.

Exercice 7 *Automatiquement satisfait*

On pose $n=860$ et $f=\frac{763}{860}$.

$n\geqslant 30$; $nf=763$ et $n(1-f)=97$ donc $nf\geqslant 5$ et $n(1-f)\geqslant 5$

On peut donc calculer un intervalle de confiance (au niveau de confiance 95 %) de la proportion de clients satisfaits par la mise en place de caisses automatiques :

$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{763}{860}-\frac{1}{\sqrt{860}};\frac{763}{860}+\frac{1}{\sqrt{860}}\right]\approx[0{,}8531;0{,}9214]$.

$0{,}8531<0{,}9$ donc le sondage remet en question l'affirmation du gérant, bien que 0,9 appartienne à l'intervalle. Le gérant devrait plutôt affiche « *<u>environ</u> 90 % des clients de notre magasin...* ».

Exercice 8 *QCM*

Réponse d.

$\left(f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(f-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc l'amplitude de l'intervalle de confiance (niveau de confiance de 95 %) est $\frac{2}{\sqrt{n}}$: $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}\geqslant\frac{1}{0{,}04} \Leftrightarrow \sqrt{n}\geqslant 50 \Leftrightarrow n\geqslant 2\,500$.