RECURRENCE

Je vous propose ici une démonstration du principe de récurrence.

Ce n'est pas au programme de terminale, mais c'est très instructif pour tout élève désirant aller en prépa.

La démonstration par récurence a été inventé par Blaise PASCAL, célèbre auteur des « Pensées »(1670, posthume).

La preuve de l'efficacité de cette démonstration particulière repose sur le fait que tout ensemble d'entiers naturels possède un plus petit élément : il est remarquable de pouvoir inverser le problème de l'infini en un problème de « premier »élément !

Démonstration du principe de récurrence

Raisonnons par l'absurde en supposant :

(a) Que H_0 vraie et que si pour n'importe quel entier k, la propriété H_k est vraie alors H_{k+1} est vraie.

(b) Que H_n n'est pas vraie pour tout entier n.

Tout d'abord :

Appelons A l'ensemble des entiers pour lesquels H_n est fausse :

A est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Or toute partie de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément !

Nommons alors α le plus petit élément de A.

Ensuite :

Remarquons que si H_0 est vraie c'est que $0 \notin A$.

Ainsi $\alpha \geqslant 1$ et l'on peut donc considérer l'entier $\alpha - 1$.

Comme α est le plus petit élément de A, cela signifie que $\alpha - 1$ n'est pas dans A.

Mais cela signifie que $H_{\alpha-1}$ est vraie !

Concluons :

Mais l'hypothèse nous dit que si $H_{\alpha-1}$ est vraie alors H_α est vraie également !

Ce qui contredit l'appartenance de α à A.

Ainsi les suppositions 1 et 2 de départ sont contradictoires.

Cela signifie que si l'hypothèse 1 est vraie alors on a obligatoirement la négation de l'hypothèse 2, c'est à dire : la propriété H_n est vraie pour tout entier n.

Nous venons de démontrer que :

(a) Si l'on a une propriété dépendant d'un entier n : H_n.

(b) Si H_0 est vraie.

(c) Pour n'importe quel entier k, si on a l'implication logique : H_k vraie implique H_{k+1} vraie.

(d) Alors la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.