LIMITE D'UNE SUITE

« Le plus grand service qu'on puisse rendre à un auteur est de lui interdire de travailler pendant un certain temps. Des tyrannies de courte durée seraient nécessaires, qui s'emploieraient à suspendre toute activité intellectuelle. La liberté d'expression sans interruption aucune expose les talents à un péril mortel, elle les oblige à se dépenser au-delà de leurs ressources et les empêche de stocker des sensations et des expériences.
*La liberté sans **limites** est un attentat contre l'esprit. »*

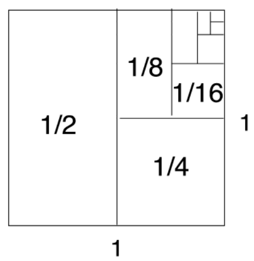
Emil Cioran, De l'inconvénient d'être né (1973)

Questions d'introduction

1. Notons S = 1+2+4+8+…

Alors 2S = 2+4+8+16+…
donc $2S-S=-1$ *ie* $S=-1$.
Donc : $1+2+4+8+\ldots=-1$.
Où est le problème ?

2. D'après ce dessin, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=$?



3.

n	somme des 1/k de 1 à n
1	1,00
2	1,50
3	1,83
4	2,08
5	2,28
6	2,45
7	2,59
8	2,72
9	2,83
10	2,93
11	3,02
12	3,10
13	3,18
14	3,25
15	3,32

On trouve : $\sum_{k=1}^{1\,000}\frac{1}{k}\approx 7{,}4855$ $\sum_{k=1}^{10\,000}\frac{1}{k}\approx 9{,}7876$ $\sum_{k=1}^{50\,000}\frac{1}{k}\approx 11{,}3970$.

Il faut ajouter plus de 10^{43} termes[1] de la série pour que la somme dépasse 100.

À votre avis, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=$?

4. À votre avis, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots=$?

5. À votre avis, $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\ldots=$?

1 Soit plus de dix millions de milliards de milliards de milliards de milliards de termes…
Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

I. Limite d'une suite

I.1 Limite finie (convergence) et divergence

DÉFINITION

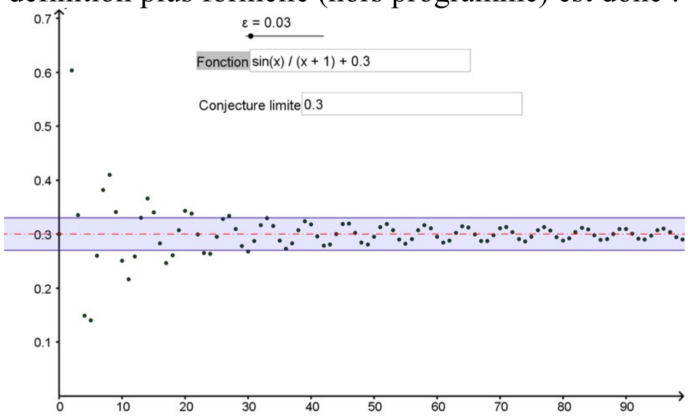
Une suite (u_n) admet pour limite le réel l si

On dit alors que (u_n) est ***convergente*** et converge vers l .

Notation : Si aucune confusion possible, on note aussi :

Remarque : un intervalle ouvert contenant l est de la forme

Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N}\ \Rightarrow\ l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$.



La suite $\left(\frac{\sin(n)}{n+1}+0{,}3\right)$ *semble converger vers 0,3.*

EXEMPLE C1

Démontrer que, pour tout réel *k*, la suite $\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers 0.

EXEMPLES A1 ET A2

p. 161 SF2 b. d.

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$.

DÉFINITION

Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***.

EXEMPLE C2

La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente : elle n'admet pas de limite.

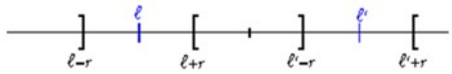
PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Une suite convergente admet une limite unique.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel l. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge également vers un autre réel l'.

On pose $r=\frac{|l-l'|}{4}$, $\mathrm{I}=]l-r;l+r[$ et $\mathrm{I}'=]l'-r;l'+r[$.



$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ donc I contient tous les u_n à partir d'un certain rang N_1

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l'$ donc I' contient tous les u_n à partir d'un certain rang N_2.

En notant $\mathrm{N}=\max\{\mathrm{N}_1;\mathrm{N}_2\}$, pour tout entier n tel que $n\geqslant \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$ et $u_n \in \mathrm{I}'$.

Or, ceci est impossible car I et I' sont des intervalles disjoints.

Démos avec utilisation de la valeur absolue :

youtu.be/33CreRZlkkQ

PROPRIÉTÉS (HORS PROGRAMME)

i) Une suite convergente est bornée.
ii) Une suite non bornée est divergente.

Démonstrations :

Le *ii)* est la contraposée du *i)*.

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel l. En notant $\mathrm{I}=]l-1;l+1[$, cet intervalle contient tous les u_n à partir d'un certain rang N.

On note $\mathrm{M}=\max\{u_0;u_1;u_2;\dots;u_\mathrm{N};l+1\}$.

On a alors, pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant \mathrm{M}$. Autrement dit, (u_n) est majorée par M.

On montrerait de même que (u_n) est minorée par m avec $m=\min\{u_0;u_1;u_2;\dots;u_\mathrm{N};l-1\}$.

/!\ *Attention* /!\

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
Contre-exemple : $((-1)^n)$.

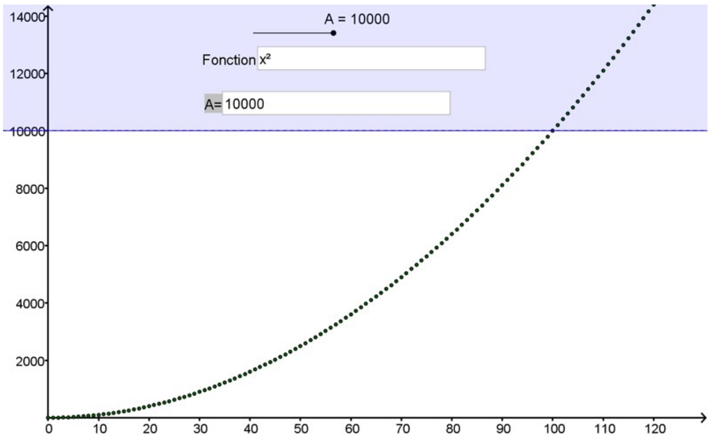
I.2 Limite infinie

DÉFINITION

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

Notation : Si aucune confusion possible, on note aussi :

Une définition plus formelle (hors programme) est donc : $\forall\, \mathrm{A}>0,\ \exists\, \mathrm{N}\in\mathbb{N},\ n\geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n>\mathrm{A}$.



La suite (n^2) semble tendre vers $+\infty$.

Exemple C3

Démontrer que, pour tout réel $k>0$, la suite $(k\sqrt{n})$ diverge vers + ∞.

Exemple A3

p. 161 SF2 a.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

On pose alors facilement :

DÉFINITION

Une suite (u_n) tend vers – ∞ si $(-u_n)$ tend vers + ∞.
Autrement dit, si **tout** intervalle $]-\infty;A[$ contient **tous** les u_n à partir d'un certain rang.

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Exemple A4

p. 161 SF2 c.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\sqrt{n}=-\infty$.

I.3 Alors c'est quoi la divergence ?

Par définition, une suite qui tend vers l'infini ne converge pas. Autrement dit elle diverge…
On dit donc par exemple qu'une suite **diverge vers +∞** .
Mais alors « une suite divergente tend-elle nécessairement vers l'infini » ? Pas du tout !

Si une suite diverge, alors : - soit

- soit

II. Opérations sur les limites

II.1 Limite d'une somme

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n =$						

II.2 Limite d'un produit

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$						

II.3 Limite d'un quotient

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$							

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$					

Il y a donc quatre cas d’indétermination, qui sont, en utilisant un abus d’écriture :

Pour lever une indétermination, le principe est de transformer l’écriture de l’expression étudiée pour se ramener aux théorèmes généraux, le plus souvent en ***factorisant par le terme dominant***.

Exemple C4

Déterminer la limite de la suite de terme général $7n^3-5n^2+3n+2$.

Exemples A5 à A8

p. 163 SF3

En utilisant les opérations, déterminer la limite de chaque suite :

a. $u_n=2n^2+4n+1$ **b.** $v_n=2n^2-4n+1$ **c.** $w_n=\dfrac{n+1}{n^2+2}$ **d.** $t_n=3n-\sqrt{n}$

Exemples A9 à A11

tsm-ls-exa91011-cor

En utilisant les opérations, déterminer la limite de chaque suite :

a. $u_n=n^2+\dfrac{1}{n}$ **b.** $v_n=-5\sqrt{n}-n^3$ **c.** $w_n=\dfrac{2}{3n+5}$

Exemples A12 et A13

tsm-ls-exa1213-cor

Déterminer la limite de chaque suite :

a. $u_n=n^2-n$ **b.** $v_n=\dfrac{4n^2}{n+1}$

III. Limites et comparaison

III.1 Théorèmes de comparaison (à l'infini)

III.1.1 A l'infini

THÉORÈMES

Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors

ii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors

Démonstrations : DÉMO. EX. tsm-ls-demo1 < 7 min ou  ou p. 166

EXEMPLE A14

p. 165 SF4 1.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n - \cos(n)$.

EXEMPLES A15 ET A16

tsm-ls-exa1516-cor

Déterminer la limite de chaque suite :

a. $u_n = n + 2\sin(n)$ après avoir montré que $u_n \geqslant n-2$

b. $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$

III.1.2 De suites convergentes

PROPRIÉTÉ (HORS PROGRAMME MAIS TRÈS UTILE)

Supposons $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) et (v_n) convergent vers des limites notées l et l' alors : $l \leqslant l'$.

Démonstration : avec les hypothèses de la propriété, supposons par l'absurde que $l > l'$.

Alors à partir d'un certain rang N_1 , $l - \frac{l-l'}{2} < u_n$ *ie* $\frac{l+l'}{2} < u_n$

et à partir d'un certain rang N_2 , $v_n < l' + \frac{l-l'}{2}$ *ie* $v_n < \frac{l+l'}{2}$.

Donc à partir de $\max\{\mathrm{N}_1 ; \mathrm{N}_2\}$, $v_n < u_n$.

Ce qui contredit le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

REMARQUE : si $u_n < v_n$ alors on n'a pas nécessairement $l < l'$, mais $l \leqslant l'$. Contre-exemple de la proposition (fausse) « Si $u_n < v_n$ alors $l < l'$ » : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$; on a bien $u_n < v_n$ mais $l = l'$.

III.2 Théorème des gendarmes

THÉORÈME DES GENDARMES (OU D'ENCADREMENT)

Supposons $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors (v_n) converge vers l.

<u>Démonstration</u> : p. 166

<u>EXEMPLE C5</u>

Démontrer que $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

<u>EXEMPLE A17</u>

p. 165 SF4 2.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$ après avoir montré que $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant \dfrac{n+(-1)^n}{n+1} \leqslant 1$.

IV. Limite d'une suite monotone

IV.1 Théorème de la convergence monotone

THÉORÈME DE LA CONVERGENCE MONOTONE (ADMIS)

i) Une suite croissante et majorée converge.

ii) Une suite décroissante et minorée converge.

<u>Démonstrations</u> :

i) L'idée est d'utiliser le théorème « toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie », avec l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. On la note l.
Alors $l-\epsilon$ n'est pas un majorant de (u_n). Donc il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant l-\epsilon$.
Or (u_n) est croissante donc si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant u_{n_0}$.
On a donc : $l+\epsilon \geqslant l \geqslant u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant l-\epsilon$. D'où (u_n) converge vers l.

ii) Si (v_n) est décroissante et minorée, alors $(-v_n)$ est croissante et majorée, donc d'après la propriété précédente, $(-v_n)$ converge, et par produit on a donc (v_n) qui converge.

<u>REMARQUE</u> : ce théorème capital affirme la convergence de suites, ***mais n'apporte aucune information sur la valeur de cette limite***. Il est cependant très utilisé pour démontrer assez facilement une convergence.

Exemple A18


p. 165 SF5

Soit (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$. On admet que $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$.
Démontrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exemples A19

tsm-ls-exa19-cor

Soit (u_n) définie par $u_n=\frac{n-1}{n+4}$.

1. Démontrer que (u_n) est majorée par 1.
2. Démontrer que (u_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.

IV.2 Suites monotones non bornées

PROPRIÉTÉS

i) Une suite croissante et non majorée diverge vers + ∞.

ii) Une suite décroissante et non minorée diverge vers – ∞.

Démonstrations : DÉMO. EX. tsm-ls-demo2 < 8 min ou 

V. Limites de la suite géométrique (q^n) en fonction de q

PROPRIÉTÉS

q	$q\leqslant -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=$				

Démonstrations : DÉMO. EX. tsm-ls-demo3 5:19 → 11:30

Exemples C6 à C9

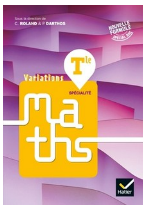
tsm-ls-exc6789-cor

1. Étudier la convergence des suites définies par :

a) $u_n=\frac{2}{3^n}$ **b)** $v_n=-3(\sqrt{2})^n$ **c)** $w_n=\frac{(-3)^n}{5}$.

2. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=2^n-3^n$ pour tout entier n.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.168
- QCM 11 questions corrigées → p.169
- Exercices corrigés → 48 à 58 p.170
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 172 p.184

• QCM 8 questions corrigées → tsm-ls-mqcm

• Deux exercices types corrigés → tsm-ls-met1 et tsm-ls-met2

• Deux exercices pour réviser → tsm-ls-ching-2exorev (corrigés : tsm-ls-ching-2exorev-cor)

– exercice 1 : suites mêlées $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$ et géométrie repérée (calcul distance)

– exercice 2 : sens de variation de $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

• Un exercice pour réviser → tsm-ls-ching-1exorev-cor

étude d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$ (réc. + limite)

et de $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ (sens de variation, terme général, limite)

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
→ maths-et-tiques : tsm-ls-ym
→ jaicompris.com : tsm-ls-jaicompris