T^{le} spé

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

« Exponentielle et logarithme sont au restaurant. Qui paie l'addition ? Exponentielle car logarithme népérien. »

Rappels de Première

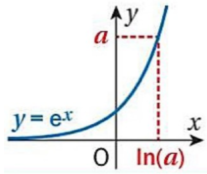
cours → p.284

8 exercices corrigés → p.285

Rappels sur la fonction exp :

tsm-lf-rap-fb tsm-lf-rap-sf

I. Fonction réciproque de la fonction exp



D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a>0$, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution réelle.

DÉFINITIONS

• On appelle ce réel ***logarithme népérien de a*** et on le note $\ln(a)$.

Si aucune confusion n'est possible, on le note parfois $\ln a$.

• On note $\ln$ la fonction qui, à tout réel $x>0$, associe le réel $\ln(x)$.

→ À RETENIR ←

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \left]0;+\infty\right[\ : \ e^x=a \iff x=\ln(a)$$

REMARQUE : on dit que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des ***fonctions réciproques***.
Au sens de la composition de fonctions, on dit aussi parfois que $\ln$ est l'inverse de $\exp$, mais cela est confus car l'inverse de $\exp$ est plutôt compris comme $\dfrac{1}{\exp}$.

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

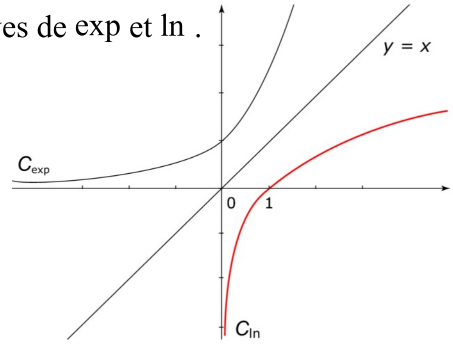
- $\ln 1=$
- $\ln e=$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ \ln(e^x)=$
- $\forall x \in \left]0;+\infty\right[\ : \ e^{\ln(x)}=$

Démonstrations :

PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Démonstration : on note $C_{\exp}$ et $C_{\ln}$ les courbes représentatives de exp et ln .



II. Propriétés algébriques

THÉORÈME (RELATION FONCTIONNELLE)

Pour tous réels x et y strictement positifs : $\ln(xy)=$.

Démonstration :

→ À RETENIR ←

La fonction $\ln$ transforme les en .

<u>Remarque</u> : par récurrence, on pourrait alors démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x_1;x_2;x_3;\dots;x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n\ ,\ \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\ .$$

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=$
- $\ln\sqrt{x}=$
- $\ln(x^n)=$

Démonstrations :

-
-

•

• → pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence sur n
→ pour $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$: on pose $n=-m$ et alors
$\ln(x^n)=\ln(x^{-m})=$

EXEMPLES C1 À C3

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(64)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$

2. Simplifier « au maximum » $\ln(\sqrt{108})$.

EXEMPLES A1 À A4

p. 289 SF2

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres réels suivants.

a) $\ln(4)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ chacun des nombres réels suivants.
a) $\ln(24)$ **b)** $\ln(\sqrt{72})$

REMARQUES : puisque $\ln(x^n)=n\ln(x)$ pour $x>0$ et n un entier relatif, on a $x^n=\mathrm{e}^{n\ln(x)}$.
On peut donc étendre ces propriétés aux réels en définissant une puissance non entière :

DÉFINITION	Pour tout réel $x>0$, pour tout réel y : $x^y=\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

Ainsi, on peut donner du sens à $3^{\sqrt{2}}$, 8^{π} ou $5^{\frac{7}{4}}$:

$3^{\sqrt{2}}=$ $8^{\pi}=$ $5^{\frac{7}{4}}=$

Pour tout réel $a>0$, on appelle ***fonction exponentielle de base a***, notée $\exp_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x)=a^x$ (ainsi, $\exp=\exp_{\mathrm{e}}$). Démontrons que pour tout réel $a>0$ et tous réels x et y : $a^{x+y}=a^x a^y$:

On peut d'ailleurs démontrer que :

▪ les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle $f(x\,y)=f(x)+f(y)$ qui sont définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $f(x)=k\ln(x)$ où $k \in \mathbb{R}$ (ce qui permet de définir les logarithmes « de base a », notamment la fonction log, le logarithme décimal très utilisé en sciences).

Ces fonctions sont même les seules solutions continues !

→ Voir l'approfondissement « Équation fonctionnelle des logarithmes ».

▪ les fonctions solutions non nulles de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)f(y)$ qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\exp_a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont même les seules solutions continues !

→ Voir l'approfondissement « Équation fonctionnelle des exponentielles ».

Si a est un réel négatif, peut-on quand même donner un sens à a^x ? Par exemple à $(-3)^{\sqrt{2}}$?
Oui ! En effet, votre calculatrice vous donnera un message d'erreur ou, si le mode « complexe » est activé, un *nombre complexe* (enseigné en T^le option « mathématiques expertes »).

III. Étude de la fonction ln

III.1 Dérivée et variations

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est dérivable sur son ensemble de définition et $\ln'(x)=$.

Démonstration :

→ La dérivabilité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est admise en Terminale, mais :

• la courbe $C_{\ln}$ étant la symétrique de $C_{\exp}$ avec exp qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, il est intuitif que $C_{\ln}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;

• la démonstration est tout à fait possible !

→ Voir l'approfondissement « Dérivabilité de la fonction ln » pour une démonstration qui consiste à démontrer que $\ln$ est dérivable en 1 puis à en déduire qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

→ Voici une démonstration qui suppose connu[1] que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$:

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+h>0$.

On cherche à démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\frac{1}{x}$.

$$\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

On pose $n=\frac{x}{h}$. Alors $\frac{h}{x}=\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{h}=\frac{n}{x}$

donc $\ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)=\ln\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$.

Or, $\lim\limits_{h\to 0} n=+\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ donc, par composition et produit de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\frac{1}{x}$.

→ En admettant que ln est dérivable :

on pose $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}$ pour tout $x>0$.

Alors $f'(x)=\ln'(x)\times\exp'(\ln(x))=\ln'(x)\times x$

mais aussi : $f(x)=x$ donc $f'(x)=1$

d'où le résultat.

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration : pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ donc $\ln'(x)>0$, d'où le résultat.

1 Pour une démonstration de cette limite, voir l'approfondissement « e et la capitalisation continue (1) » ou « e et la capitalisation continue (2) ».

COROLLAIRES (IMMÉDIATS)

- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Exemples C4 à C6

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\ln(-2x+7)=3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3x+2)<-4$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}9^n<0{,}01$.

Exemple A5

p. 291 SF3

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres réels x pour lesquels l'équation $\ln(3x+1)=1$ est définie.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

Exemples A6 à A9

tsm-fln-exa6789-cor

Résoudre les équations et inéquations suivantes.
a) $\ln(x)=5$ **b)** $e^x=3$ **c)** $\ln(1-x)\leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3}>4$.

Exemples A10 et A11

tsm-fln-exa1011-cor

1. Résoudre l'équation $\ln(4x-1)=\ln(2-x)$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2+2x-3)\geqslant\ln(2)$.

Exemple A12

tsm-fln-exa12-cor

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n<10^{-3}$ où $n\in\mathbb{N}$.

III.2 Limites aux bornes

PROPRIÉTÉS

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty$

Démonstrations :

• Soit $A>0$. Soit $x>0$: $\ln(x)>A \Leftrightarrow x>e^A$.
Donc, pour tout réel $A>0$, $]A;+\infty[$ contient tous les réels $\ln(x)$ dès que x est assez grand d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

• En 0, on peut faire comme ci-dessus, ou par « changement de variable » :

Exemple C7

tsm-fln-exc7-cor

Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$.

EXEMPLE A13

p. 291 SF4

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x-3$.
On admet que *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de *f*.

III.3 Convexité

PROPRIÉTÉ

La fonction $\ln$ est concave sur son ensemble de définition.

Démonstration :

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

$\ln'$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. D'où $\ln''(x)<0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le résultat.

REMARQUE : on peut en déduire que la courbe représentative de $\ln$ est toujours en dessous de ses tangentes, et obtenir ainsi de nombreuses inégalités, comme $\ln(x)\leqslant x-1$ ou $\ln(x)\leqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

IV. Limites usuelles

PROPRIÉTÉS (CROISSANCES COMPARÉES)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\ln(x)=0$

Démonstrations :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}=0$

donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}=0$ *ie* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

→ pour une autre démonstration qui utilise le théorème des gendarmes, voir l'approfondissement « Croissance comparée de ln(*x*) et *x* ».

Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$, raisonner par récurrence sur *n*.

- $x\ln(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right)=-\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln(X)}{X}=0$ (propriété précédente)

d'où, par composition de limites, le résultat.

Pour $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\ln(x)=0$, raisonner par récurrence sur *n*.

→ UTILE À RETENIR ←

La fonction puissance « l'emporte » sur $\ln$ en 0 et $+\infty$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

Démonstration : La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$, d'où $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=1$.

→ pour une démonstration qui n'utilise pas la dérivabilité de $\ln$, voir l'approfondissement « Dérivabilité de la fonction ln ».

EXEMPLE A14


p. 293 SF5

Étudier la limite : **a)** en $+\infty$ de *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-2x$.

b) en 0 de la *g* définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^3}$.

c) en 0 et en $+\infty$ de *h* définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=4x-x\ln(x)$.

d) en $-\infty$ de *k* définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=x-\ln(x^2+1)$.

V. Dérivée d'une fonction composée avec ln

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction composée $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

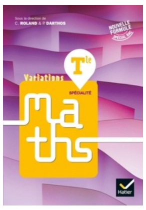
Démonstration : c'est la dérivée d'une fonction composée, $(\ln\circ u)'=u'\times(\ln'\circ u)=u'\times\frac{1}{u}$.

EXEMPLE C8

Soit *f* la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(5x^4-2)$.

Démontrer que *f* est dérivable sur $[1;+\infty[$, et déterminer sa fonction dérivée f'.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.296
- QCM 14 questions corrigées → p.297
- Exercices corrigés → 42 à 53 p.298
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 132 p.310

- QCM 7 questions corrigées → tsm-fln-mqcm
- Deux exercices types corrigés → tsm-fln-met1 et tsm-fln-met2
- Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
  - → maths-et-tiques : tsm-fln-ym
  - → jaicompris.com : tsm-fln-jaicompris

→ En 1797, dans son Tome 1 du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, le mathématicien français Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843) écrit[2] :

> 24. Pour que l *a* soit déterminé, il faut faire une hypothèse sur l *e*; la plus simple sans doute est de prendre l *e* = 1, auquel cas on tombe sur une espèce particulière de logarithmes, qui sont précisément ceux que Neper a considérés. On les a nommés depuis *logarithmes hyperboliques*, parce qu'on peut les déduire de la quadrature des espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais cette dénomination est vicieuse, car on peut également tirer de la quadrature de l'hyperbole en général, tous les systèmes de logarithmes. Il seroit donc plus convenable d'appliquer aux premiers le nom de l'inventeur, et de consacrer ainsi la mémoire de celui qui a rendu un aussi grand service aux Mathématiques : on pourroit les appeller logarithmes de Néper, ou logarithmes *Népériens*.

Or, contrairement à ce que dit Lacroix, Napier n'avait pas du tout établi de tels logarithmes. Mais il semble bien que l'on doive à Lacroix l'appellation *logarithme népérien*, en hommage au mathématicien écossais John Napier (1550 – 1617), dont le nom est francisé en Neper, qui publia les premières tables logarithmiques en 1614.

→ Généralement, l'origine des logarithmes népériens est datée en 1647 : Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667) travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété d'additivité des fonctions logarithmes. Cependant, il ne fait pas le lien avec les logarithmes de Napier. C'est son disciple Alphonse Antoine de Sarasa (1617 – 1667) qui le fera en 1649. Ainsi, le logarithme népérien s'est tout d'abord appelé *logarithme hyperbolique*, en référence à l'aire sous l'hyperbole qu'il représente.

En 1748, dans son *Introductio in analysin infinitorum*, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) parle également de *logarithme naturel* :

> 122. Comme on peut prendre à volonté la base *a* pour établir un système de logarithmes, nous pourrons la prendre telle, que *k* devienne = 1. Supposons donc *k* = 1 ; la série trouvée ci-dessus (*art.* 116) deviendra $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c$, dont les termes convertis en décimales, & ajoutés donnent pour *a* cette valeur 2,71828182845904523536028, dont le dernier chiffre est encore exact. Les logarithmes calculés sur cette base, s'appellent Logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au reste, pour abréger nous désignerons constamment ce nombre 2,718281828459 &c. par la lettre *e*, qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques, à laquelle répond la valeur de *k* = 1 ; c'est-à-dire, que cette lettre *e* exprimera la somme de la série $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$ continuée à l'infini.

On lit souvent que l'appellation *logarithme naturel* apparaît pour la première fois en 1668 dans *Logarithmotechnia*[3] de Nicolaus Mercator[4] (1620 – 1687). Or, en lisant l'ouvrage (en latin), je n'ai vu aucune mention de ce terme…

→ Cette fonction fut notée **l.** ou **l**, dès le début du XVIIIe siècle, et jusque dans la première moitié du XIXe siècle, puis **log.** ou **log** dès la fin du XVIIIe siècle, puis **Log** pour la différencier de la fonction log (logarithme de base quelconque, ou plus particulièrement logarithme décimal), ou encore **logh** (pour « logarithme hyperbolique »), avant que ne tente de s'imposer la notation préconisée par la norme AFNOR de 1961 : la notation **ln**. Avec un succès cependant très relatif : la notation **log** est encore aujourd'hui utilisée dans plusieurs branches des mathématiques (notamment en théorie des nombres), ainsi que dans plusieurs langages de programmation*.

* par exemple dans Python où, avec le module `math`, `log(x)` renvoie le logarithme népérien de `x`.

2 Lire en ligne (pages 36/37) : gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k92729z/f71.double.mini.

3 Lire en ligne : books.google.fr/books?id=7jMVAAAAQAAJ.

4 Aussi connu sous son nom allemand Niklaus Kauffman.