T^{le} option ME

NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE ALGÉBRIQUE ET POLYNÔMES

The Simpson, saison 26, épisode 22

I. Un ensemble qui contient les réels

PROPRIÉTÉ-DÉFINITIONS

Il existe un ensemble de nombres, appelé ***ensemble des nombres complexes*** et noté ℂ, tel que :

- ℂ contient l'ensemble des nombres réels ;
- ℂ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans ℝ ;
- ℂ contient un nombre noté i qui vérifie $\mathrm{i}^2=-1$;

PROPRIÉTÉ-DÉFINITIONS

Tous les éléments z de ℂ s'écrivent de manière unique sous la forme $a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels.

Cette écriture s'appelle la ***forme algébrique*** de z.

Le réel a s'appelle la ***partie réelle*** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.

Le réel b s'appelle la ***partie imaginaire*** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration : Supposons qu'un nombre complexe s'écrire sous les formes $a+\mathrm{i}b$ et $a'+\mathrm{i}b'$.

Alors : $a-a'=\mathrm{i}(b'-b)$.

Si $b\neq b'$ alors $\dfrac{a-a'}{b'-b}=\mathrm{i}$. Or ceci est impossible car i ∉ ℝ. D'où $b=b'$.

Et alors : $a-a'=0$, d'où $a=a'$.

REMARQUES :
- /!\ La partie imaginaire d'un complexe z est un nombre réel.
- $\mathrm{Re}(z)=0 \Leftrightarrow \exists\, b\in\mathbb{R},\ z=\mathrm{i}b$.
  On dit alors que z est un ***imaginaire pur*** et on note $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
- $\mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Par unicité de l'écriture algébrique :

PROPRIÉTÉS

- $a+\mathrm{i}b=0 \Leftrightarrow a=b=0$
- $a+\mathrm{i}b=a'+\mathrm{i}b' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$
- $a+\mathrm{i}b\neq a'+\mathrm{i}b' \Leftrightarrow a\neq a'$ ou $b\neq b'$

Exemple C1

Résoudre l'équation $3z+2-4\mathrm{i}=3$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple C2

Déterminer la forme algébrique, la partie réelle et la partie imaginaire du complexe z défini par :

$$z=3\mathrm{i}^2-5\mathrm{i}+8-7\mathrm{i}+\sqrt{2}-(-\mathrm{i}^2)-(-6\mathrm{i}+15)\times\frac{1}{3}.$$

II. Opérations

On applique dans $\mathbb{C}$ les mêmes règles opératoires que dans $\mathbb{R}$.

Exemples A1 à A4

p. 17 méthode 3

On considère les deux nombres complexes : $z_1=5-2\mathrm{i}$ et $z_2=-2+4\mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.
a) z_1+z_2 **b)** $4z_1$ **c)** z_1z_2 **d)** z_1^2.

Exemples C3 à C9

1. Calculer i^3, i^4 et $(1+\mathrm{i})^2$.
2. On considère les nombres complexes : $z=5-4\mathrm{i}$ et $z'=1+\mathrm{i}$.
a) Calculer $z+z'$ et zz'.
b) Calculer $3z-4\mathrm{i}z'$ et z^2.

PROPRIÉTÉ

Tout nombre complexe non nul admet un inverse $\frac{1}{z}$: $\forall z\in\mathbb{C}^*, \exists\ z'\in\mathbb{C},\ zz'=1$.

Démonstration : Soit $z\in\mathbb{C}^*$: $z=a+\mathrm{i}b$.

$\frac{1}{z}=$

Exemple C10

Déterminer l'inverse (sous forme algébrique) des nombres complexes : $z_1=-2+3\mathrm{i}$ et $z_2=\sqrt{2}-3\mathrm{i}$.

Exemples A5 et A6

p. 17 méthode 4

1. Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique : $z_1 = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(5-\mathrm{i})\times z - \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
On donnera la ou les solution(s) sous forme algébrique.

Exemple C11

Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

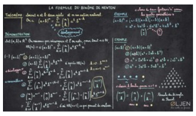
PROPRIÉTÉ (BINÔME DE NEWTON)

$$\forall\ (a\,;b)\ \in\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\,,\ \forall\ n\in\mathbb{N}:\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\ .$$

Démonstrations :

ou page 20

DÉMO. EX.
tome-nc1-demo2
< 11 min



← tome-nc1-demo2-capture

Exemple C12

Développer $(a+b)^5$ à l'aide du binôme de Newton.

III. Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soit *z* un nombre complexe d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}\,b$.

Le ***complexe conjugué*** de *z* est le nombre complexe, noté $\overline{z}$, d'écriture algébrique $a-\mathrm{i}\,b$.

Autrement dit : $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

Exemples C13 à C15

1. $\overline{4-2\mathrm{i}} =$ **2.** $\overline{\mathrm{i}} =$ **3.** $\overline{-4} =$

PROPRIÉTÉS

Pour tout nombre complexe *z* :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=\overline{z}$
- $z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z=-\overline{z}$

Démonstrations :

PROPRIÉTÉS

Pour tous nombres complexes x et y : • $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$

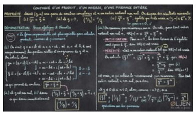
• $\overline{x\,y}=\overline{x}\;\overline{y}$ • $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \overline{x^n}=\overline{x}^n$

• si $x\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{\overline{x}}$ • si $x\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)}=\dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$

Démonstrations :

ou page 18

DÉMO. EX.
tome-nc1-demo1
< 13 min



← tome-nc1-demo1-capture

EXEMPLES A7 ET A8

p. 19 méthode 5

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Z_1=z-\overline{z}$.

a) Déterminer le conjugué de Z_1 en fonction de z et $\overline{z}$.

b) Z_1 est-il un nombre réel, imaginaire pur ou aucun des deux ?

2. Reprendre les questions précédentes avec $Z_2=z\times\overline{z}$.

EXEMPLES A9 ET A10

p. 19 méthode 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique. **a)** $-\overline{z}=5-\mathrm{i}$ **b)** $2z+\overline{z}=3-2\mathrm{i}$.

EXEMPLES C16 À C19

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z\overline{z}+3(z-\overline{z})=14-7\mathrm{i}$.

2. Calculer le conjugué de $z_1=(5+2\mathrm{i})(7\mathrm{i}-5)$ et $z_2=\dfrac{5-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$.

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z^2-2z+7 est un réel.

IV. Équations du second degré

THÉORÈME

Soient a , b et c des réels, avec $a \neq 0$.

On note (E) l'équation $a z^2 + b z + c = 0$ et S l'ensemble de ses solutions.

On note Δ son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: $S = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$. ← deux solutions réelles distinctes
- Si $\Delta = 0$: $S = \{\frac{-b}{2a}\}$. ← unique solution réelle
- Si $\Delta < 0$: $S = \{\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\}$. ← deux solutions complexes conjuguées

Démonstration :

EXEMPLE C20

Résoudre dans ℂ l'équation $9z^2-6z+5=0$.

EXEMPLES A11 ET A12

p. 19 méthode 8

Résoudre dans ℝ puis dans ℂ les équations suivantes.

a) $z^2+10=0$ **b)** $z^2-4z+5=0$.

V. Factorisation et racines d'un polynôme

DÉFINITIONS

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle ***fonction polynôme de degré n*** (ou plus simplement ***polynôme de degré n***) toute fonction P vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists\ (a_0;a_1;\ldots;a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$, $\mathrm{P}(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z_k$.

On dit que a est une ***racine*** de P si $\mathrm{P}(a)=0$.

Lorsque $a_n=1$, on dit que le polynôme P est ***unitaire***.

THÉORÈMES

Soient z et a deux nombres complexes.

• Pour tout entier naturel n non nul :

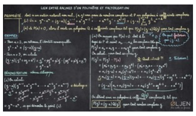
$$z^n-a^n=(z-a)\mathrm{Q}(z) \text{ où Q est un polynôme de degré au plus } n-1 \text{ .}$$

• Si a est une racine de P, alors pour tout complexe z, $\mathrm{P}(z)=(z-a)\mathrm{Q}(z)$ où Q est un polynôme de degré au plus $n-1$.

Démonstration :

ou page 22

DÉMO. EX.
tome-nc1-demo3
< 10 min



← tome-nc1-demo3-capture

REMARQUE : on peut démontrer que $z^n-a^n=(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k$.

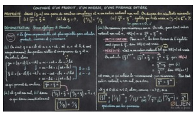
THÉORÈME

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration :

ou page 26

DÉMO. EX.
tome-nc1-demo4
< 10 min



← tome-nc1-demo4-capture

EXEMPLE A13

p. 23 méthode 9

Factoriser $z^3-\mathrm{i}^3$ par $(z-\mathrm{i})$.

Exemple A14


p. 23 méthode 10

On considère l'équation $z^3-2z^2+z-2=0$.

1. Vérifier que 2 est une solution de l'équation.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exemple C21

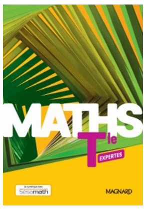
On considère l'équation $2z^3+3z-5=0$.

1. Déterminer une solution évidente.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

voir aussi lls.fr/MXPfiche1



- Fiche bilan → p.35
- QCM 9 questions corrigées → p.36
- Exercices corrigés → 148 à 156 p.37
- Exercice type corrigé (suite de complexes) → méthode 12 p.25

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tome-nc1-ym1 et tome-nc1-ym2

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : POURQUOI « COMPLEXES » ?

→ Au contraire, ils simplifient les calculs. Alors pourquoi les nombres *complexes* ?
L'adjectif « complexe » a été proposé par Carl Friedrich Gauss[1](1777 – 1855) en 1832 :
« Nous appellerons de tels nombres *nombres entiers complexes*, du moins afin que les nombres réels ne soient opposés aux nombres complexes, mais qu'ils soient considérés comme contenus dans ces derniers en tant qu'espèces d'un genre. »
Autrement dit, il faut entendre *complexe* comme *composé* (nombres composés de deux nombres réels).

→ Qui a inventé ces termes et ces notations ?

Terme ou notation	Auteur / Date
R̸. m. 15 → nombre *impossible* dont le carré vaut –15	Girolamo Cardano (1501 – 1576) 1545, *Ars Magna*
nombre imaginaire (nom officiel jusqu'en 1831) → quantité contenant la racine carrée d'un négatif	René Descartes (1596 – 1650) 1637, *Discours de la méthode (La Géométrie*[2]*)*
i → pour désigner $\sqrt{-1}$	Leonhard Euler (1707 – 1783) 1777, dans un mémoire présenté en 1777 mais qui ne sera édité qu'en 1794 dans *Institutiones calculi integralis*[3]
conjugué	Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) 1821, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*[4]
nombre complexe, partie imaginaire	Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) 1832, dans l'article *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda*[5]

1 Pour une (courte mais intéressante) biographie, voir mathemathieu.fr/bio-gauss.
2 *La Géométrie* est l'un des trois appendices publiés en 1637 par René Descartes avec le *Discours de la méthode*.
3 Article E671 de l'œuvre d'Euler. Lire en ligne : http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E671.pdf.
4 Lire en ligne : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90195 m.
5 Voir http://images.math.cnrs.fr/Ecrire-les-imaginaires?id_forum=9485#nb10.

→ Pour une histoire plus complète des nombres complexes, voir *Une longue histoire, rocambolesque et un peu complexe. Histoire des nombres impossibles* : https://www.mathemathieu.fr/500.

DES APPLICATIONS CONCRÈTES ?

→ Ayant été inventés pour résoudre des équations, et n'ayant aucune réalité physique (en ce sens, seuls les entiers naturels en ont) on peut s'attendre à ce que les complexes n'aient jamais trouvé d'applications dans le monde réel. Et pourtant…

Les complexes pour commander des robots ?

Dans d'autres contextes comme l'étude des rotations de l'espace, les mathématiciens ont inventé différents ensembles de nombres contenant les nombres complexes. Le plus simple est le corps gauche des ***quaternions***, où gauche signifie que le produit n'y est pas commutatif. Ce corps a l'avantage de ramener les calculs sur les rotations de l'espace à des calculs sur des nombres. Il est particulièrement utilisé en informatique, pour commander des robots ou des satellites.

L'usage des complexes permet de résoudre des problèmes de géométrie plane car toutes les propriétés géométriques ont une traduction en termes de nombres complexes. Les produits d'une rotation et d'une homothétie correspondent à une multiplication, ce qui simplifie les calculs.

Source : http://www.larecherche.fr/idees/back-to-basic/nombres-complexes-01-12-2007-89121

Nous n'imaginons pas combien les complexes sont utilisées de nos jours. En optique, en électricité… ils sont partout !

→ En 1893, Arthur Edwin Kennelly remarque qu'on peut généraliser la loi d'Ohm U = RI au courant alternatif en utilisant les complexes.
Beaucoup de phénomènes électriques, particulièrement ceux concernant les lignes téléphoniques et les réseaux combinant résistances, inductances et capacités (les circuits RLC), conduisent à des équations différentielles de la forme $a\,y''+b\,y'+c\,y=f$, qui peuvent être résolues à l'aide des nombres complexes : leur utilisation a augmenté à l'extrême la puissance du calcul.

→ Les nombres complexes sont à l'origine de méthodes utilisées pour accélérer les multiplications de grands nombres entiers par les circuits imprimés des ordinateurs. Ils permettent donc de gagner de l'énergie et du temps, beaucoup de temps… et donc, aussi, de l'argent.

→ Les complexes apparaissent également dans les séries de Fourier[6] et dans la résolution des équations différentielles linéaires (donc dans des branches nombreuses et diverses).

→ En physique, Albert Einstein a eu besoin de lui pour démontrer sa théorie de la relativité…
En relativité spéciale et générale, certaines formules de la métrique sur l'espace-temps deviennent plus simples si l'on considère que la composante temporelle du continuum espace-temps est imaginaire. Cette approche n'est plus standard en relativité classique, mais est utilisée de façon essentielle dans la théorie des champs quantiques. Les nombres complexes sont essentiels aux *spinors*, qui sont une généralisation des tenseurs utilisés en relativité.

→ En mathématiques, ils permettent de définir la fonction Zêta de Riemann, qui a un lien étonnant avec la répartition des nombres premiers et donc avec la cryptographie actuelle (cartes bancaires, internet, etc.).
Ce problème (l'hypothèse de Riemann) est d'ailleurs récompensée d'un million de dollars par l'institut Clay depuis l'an 2000.

→ Ils sont aussi à l'origine de la plus célèbre des fractales : l'ensemble de Mandelbrot.
Et par conséquent du développement de certains effets spéciaux au cinéma dans les années 1980, etc.

→ Les formules de base originales de la mécanique quantique – l'équation de Schrödinger et la mécanique matricielle d'Heisenberg – utilisent des nombres complexes.

---

6 « Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f. De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques). ».
C'est très utilisé en musique (studio d'enregistrement, traitement du son dans une salle de concert, etc) mais aussi pour la compression de pistes audio (MP3 etc), dans les traitements du son (réverbération pour une salle de conférence, construction d'un mur anti-bruit face à une rocade, etc).