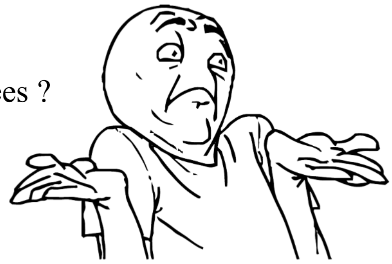
Tle spé

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Questions d'introduction (quelle est votre intuition ?)



1. Quel est nombre de façons d'asseoir 4 personnes sur 10 chaises numérotées ?
2. Quel est nombre de façons d'asseoir 10 personnes sur 10 chaises ?
3. Quel est nombre de façons de choisir 4 personnes parmi 10 ?
4. Au poker Texas Hold'em, combien de mains (5 cartes) existe-t-il ?

I. Vocabulaire

DÉFINITIONS

• Un ***ensemble*** est une collection d'objets distincts, qu'on appelle éléments de l'ensemble.

• Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ***ensemble vide*** et noté $\varnothing$.

• Le ***cardinal*** d'un ensemble E est le nombre de ses éléments. On le note $\text{card}(\text{E})$.

Remarque : l'ordre des éléments n'intervient pas. Par exemple, $\{1 ; 7 ; 5\}=\{5 ; 1 ; 7\}=\{7 ; 1 ; 5\}$.

DÉFINITIONS

• On appelle ***partie*** d'un ensemble E un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E. On dit que F est inclus dans E (ou que c'est un ***sous-ensemble*** de E), et on note $\text{F} \subset \text{E}$.

On dit aussi parfois que F est une ***combinaison*** de E.

• Une partie à 1 élément s'appelle un ***singleton***, une partie à 2 éléments s'appelle une ***paire***.

• La ***réunion*** de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E ou F.

On note cet ensemble $\text{E} \cup \text{F}$.

• L'***intersection*** de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E et F.

On note cet ensemble $\text{E} \cap \text{F}$.

• Deux ensemble E et F sont ***disjoints*** si $\text{E} \cap \text{F} = \varnothing$.

II. Principe additif

PROPRIÉTÉ (PRINCIPE ADDITIF)

Si E_1, E_2, $\text{E}_3,\ldots,$ E_p sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$\text{card}(\text{E}_1 \cup \text{E}_2 \cup \text{E}_3 \cup \ldots \text{E}_p) = \text{card}(\text{E}_1) + \text{card}(\text{E}_2) + \text{card}(\text{E}_3) + \ldots + \text{card}(\text{E}_p).$$

Autrement dit, le cardinal d'une réunion d'ensembles finis deux à deux disjoints est la somme des cardinaux.

Démonstration : par récurrence sur p. Pour l'initialisation, faire un dessin.

III. Principe multiplicatif

DÉFINITIONS

• On appelle ***couple*** une collection ordonnée de 2 objets.

• On appelle ***triplet*** une collection ordonnée de 3 objets.

• Plus généralement, on appelle ***p-uplet*** une collection ordonnée de p objets ($p \in \mathbb{N}^*$).

REMARQUES : • un couple est donc un 2-uplet, et un triplet est un 3-uplet.
• on appelle parfois un p-uplet une p-liste.
• les éléments d'un p-uplet sont parfois appelés coordonnées, composantes ou termes.
• pour distinguer un p-uplet d'une collection non ordonnée, on note ses éléments entre parenthèses :

si $a \neq b$ alors $(a\,;b) \neq (b\,;a)$.

DÉFINITIONS

Soient E_1, E_2, $\mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_p$ des ensembles. Le ***produit cartésien*** de ces p ensembles est l'ensemble des p-uplets $(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_p)$ tels que : $\forall\, i \in [\![1\,; p]\!]$, $x_i \in \mathrm{E}_i$.

On le note $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$ (dire « E_1 croix E_2 croix E_3 etc. »).

REMARQUE : on note souvent E^k le produit cartésien $\underbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{E} \ldots \times \mathrm{E}}_{k \text{ fois}}$.

Un k-uplet de E est donc un élément de E^k .

EXEMPLE C1

Si E = {a ; b ; c} et F = {d ; e} alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F} =$

PROPRIÉTÉ (PRINCIPE MULTIPLICATIF)

Si E_1, E_2, $\mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_p$ sont p ensembles finis, alors :

$$\mathrm{card}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3 \times \ldots \mathrm{E}_p) = \mathrm{card}(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{card}(\mathrm{E}_2) \times \mathrm{card}(\mathrm{E}_3) \times \ldots \times \mathrm{card}(\mathrm{E}_p) .$$

Autrement dit, le cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis est le produit des cardinaux.

Démonstration : par récurrence sur p. Pour l'initialisation, faire un arbre.

EXEMPLE A1

p. 31 SF1 (b.)

Un code secret est constitué de deux chiffres de 0 à 9 suivis de deux lettres de l'alphabet en majuscule, puis d'un caractère spécial à choisir parmi ? ! % $ £ #.
Combien de codes secrets différents peut-on constituer ?

EXEMPLE A2

tsm-cd-exa2-cor

Une cantine scolaire propose à ses élèves un menu à composer au choix. Ils peuvent choisir entre 4 entrées, 3 plats chauds, puis du fromage ou un yaourt et enfin un dessert ou un fruit.
Combien de menus peuvent-ils composer à la cantine ?

IV. Arrangements et permutations

DÉFINITIONS

Soit E un ensemble à n éléments.

• Un ***arrangement*** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E.

• Une ***permutation*** de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple C2

Soit E = {m ; a ; t ; h ; e ; i ; u}.

1. a) Citer un arrangement de E à 4 éléments :

b) Citer une permutation de E :

2. Le 12-uplet (m ; a ; t ; h ; e ; m ; a ; t ; h ; i ; e ; u) de E est-il un arrangement de E ?

PROPRIÉTÉS

Soit E un ensemble à n éléments.

• Le nombre de permutations de E est $n!$ (« *factorielle n* »).

• Le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. On le note A_n^p.

Démonstrations : faire un arbre.

Remarque : $\dfrac{n!}{(n-p)!}=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(p-1))$.

Exemples A3 et A4

Corrigé en vidéo : hatier-clic.fr/mat033

p. 33 SF2

1. Le tableau final d'un tournoi de judo féminin met en présence quinze athlètes.
Le palmarès désigne la gagnante, ainsi que les 2e, 3e, 4e et 5e au classement final.
Combien de palmarès différents peut-il exister ?

2. Lila souhaite ranger verticalement sur une même étagère 5 livres de biologie, 3 livres de mathématiques et 2 livres d'histoire.

a) Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?

b) Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

Exemples A5 à A7

tsm-cd-exa567-cor

1. On lance 7 fois une pièce de 1 euro pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles.

2. Deux joueurs jouent aux dominos, chacun recevant 7 dominos au hasard parmi les 28 dominos composant le jeu. Combien de distributions possibles y a-t-il ?

3. On dispose de quatre gâteaux. Chacun des 4 invités en choisit un pour le manger. Combien de choix possibles y a-t-il ?

V. Nombre de combinaisons

Rappel : contrairement aux arrangements, les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets.

> **PROPRIÉTÉ**
>
> Soit E un ensemble à n éléments.
>
> Le nombre de combinaisons de p éléments de E est $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
>
> On le note[1] $\dbinom{n}{p}$, en le lisant « p parmi n », et on le nomme ***coefficient binomial***.

Démonstration : le nombre d'arrangements de p éléments de E est A_n^p. On sait que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Mais on peut aussi calculer A_n^p différemment : on choisit d'abord les p éléments, il y a alors $\dbinom{n}{p}$ choix possibles, puis on peut les placer dans un certain ordre et il y a $p!$ ordres possibles.

D'où : $A_n^p = \dbinom{n}{p} \times p!$ et le résultat : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarques : • $\dbinom{n}{0} = 1$ car la seule partie de E ayant 0 élément est $\varnothing$.

• $\dbinom{n}{1} = n$ car il existe exactement n parties de E à 1 élément.

Exemples A8 et A9

p. 35 SF3

1. Au début d'une partie de belote, on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32.
Cet ensemble de 5 cartes est appelé une « main ». Combien existe-t-il de mains différentes possibles ?
2. Neuf amis souhaitent constituer une équipe de volley-ball de plage de 4 joueurs.
a) Combien d'équipes différentes peuvent-ils constituer ?
b) Parmi les neuf amis, Hector ne veut pas participer à la partie. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Hector ?
c) On sait de plus que Nadia souhaite absolument participer. Combien d'équipes différentes comprenant Nadia peut-on constituer ?

Exemple A10

tsm-cd-exa10-cor

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Parmi ceux-ci, il y a huit jetons blancs avec le numéro 0, cinq jetons rouges avec le numéro 7, quatre jetons blancs avec le numéro 2 et trois jetons rouges avec le numéro 5. On tire simultanément quatre jetons du sac.
1. Combien de tirages possibles y a-t-il ?
2. Combien de tirages y a-t-il avec les quatre numéros identiques ?
3. Combien de tirages y a-t-il avec uniquement des jetons blancs ?
4. Combien de tirages y a-t-il avec des jetons de la même couleur ?
5. Combien de tirages y a-t-il qui permettent de former le nombre 2 020 ?
6. Combien de tirages y a-t-il qui comportent au moins un jeton portant un numéro différent des autres ?

1 Certains utilisent encore la notation C_n^p (pour *p choose n*).

PROPRIÉTÉS

• ***Symétrie*** : $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

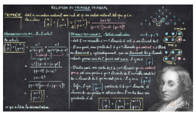
• Relation du ***triangle de Pascal*** : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$.

<u>Démonstrations</u> : le nombre d'arrangements de p éléments de E est A_n^p . On sait que $\mathrm{A}_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

• $\binom{n}{n-p}=\dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}=\binom{n}{p}$.

On peut aussi comprendre cette égalité ainsi : choisir p éléments parmi n revient à observer ceux qu'on ne choisit pas…

• DÉMO. EX.
<u>tsm-cd-demo1</u>
< 10 min



← cela peut se démontrer de deux façons différentes : par le calcul ou par une méthode combinatoire.

<u>Triangle de Pascal</u> : *du nom de Blaise Pascal (1623 – 1662), mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français (né à Clermont-Ferrand).*

$\downarrow n \; p \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1		1					
3	1			1				
4	1				1			
5	1					1		
6	1						1	
7	1							1

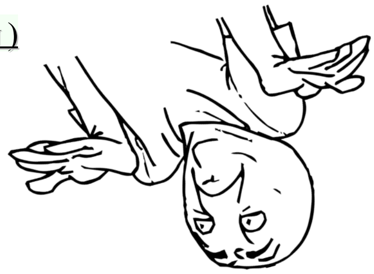
PROPRIÉTÉ

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n . Autrement dit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

<u>Démonstration</u> : DÉMO. EX.
<u>tsm-cd-demo2</u>
< 10 min

<u>REMARQUE</u> : on pourrait aussi démontrer ce résultat « par le calcul », par récurrence sur n.

Exemples C3 à C6 (réponses aux questions d'introduction)



→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

• Fiche bilan → p.38

• QCM 16 questions corrigées → p.39

• Exercices corrigés → 35 à 47 p.40

• Exercices type Bac guidés & corrigés → 135 et 136 p.52

• QCM 7 questions corrigées → tsm-cd-mqcm

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
→ maths-et-tiques : tsm-cd-ym
→ jaicompris.com : tsm-cd-jaicompris

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : LE TRIANGLE DE PASCAL

→ Le ***triangle de Pascal*** est une représentation des coefficients binomiaux dans un triangle.
Il est ainsi appelé en Occident, bien qu'il fût étudié bien avant Pascal par d'autres mathématiciens, notamment :
- en Inde
- en Perse par Al-Karaji (953 – 1029) ou Omar Khayyām (vers 1048 – 1131)
- au Maghreb par Ibn al-Banna al-Marrakushi (1256 – 1321)
- en Chine : il est appelé ***triangle de Yang Hui***, du nom du mathématicien chinois Yang Hui[2] né vers 1238 et mort vers 1298
- en Allemagne par Michael Stifel (1486 – 1567)
- en Italie : il est appelé ***triangle de Tartaglia***, du nom du mathématicien Nicolo Tartaglia (1499 – 1557), bien connu pour son rôle dans la découverte des « nombres imaginaires » (complexes)
- en France par François Viète (1540 – 1603).

→ C'est cependant Pascal qui consacre à cet outil un traité entier, en 1654 : *Traité du triangle arithmétique*.
Il y démontre 19 de ses propriétés, qui étaient déjà connues mais non démontrées.

2 Yang Hui attribue la paternité du triangle au mathématicien chinois du XIe siècle Jia Xian (vers 1010 – vers 1070).