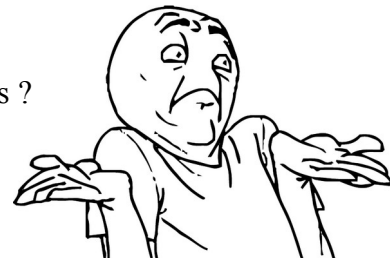


I. Vocabulaire	1	IV. Arrangements et permutations	3
II. Principe additif	1	V. Nombre de combinaisons	4
III. Principe multiplicatif	2		

Questions d'introduction (quelle est votre intuition ?)

1. Quel est nombre de façons d'asseoir 4 personnes sur 10 chaises numérotées ?
2. Quel est nombre de façons d'asseoir 10 personnes sur 10 chaises ?
3. Quel est nombre de façons de choisir 4 personnes parmi 10 ?
4. Au poker Texas Hold'em, combien de mains (5 cartes) existe-t-il ?



I. Vocabulaire

DÉFINITIONS

- Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, qu'on appelle éléments de l'ensemble.
- Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et noté \emptyset .
- Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre de ses éléments. On le note $\text{card}(E)$.

REMARQUE : l'ordre des éléments n'intervient pas. Par exemple, $\{1;7;5\}=\{5;1;7\}=\{7;1;5\}$.

DÉFINITIONS

• On appelle **partie** d'un ensemble E un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E. On dit que F est inclus dans E (ou que c'est un **sous-ensemble** de E), et on note $F \subset E$.

On dit aussi parfois que F est une **combinaison** de E.

- Une partie à 1 élément s'appelle un **singleton**, une partie à 2 éléments s'appelle une **paire**.
- La **réunion** de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E ou F.

On note cet ensemble $E \cup F$.

- L'**intersection** de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E et F.

On note cet ensemble $E \cap F$.

- Deux ensemble E et F sont **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$.

II. Principe additif

PROPRIÉTÉ (PRINCIPE ADDITIF)

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_p) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \text{card}(E_3) + \dots + \text{card}(E_p).$$

Autrement dit, le cardinal d'une réunion d'ensembles finis deux à deux disjoints est la somme des cardinaux.

Démonstration : par récurrence sur p . Pour l'initialisation, faire un dessin.

III. Principe multiplicatif

DÉFINITIONS

- On appelle **couple** une collection ordonnée de 2 objets.
- On appelle **triplet** une collection ordonnée de 3 objets.
- Plus généralement, on appelle ***p*-uplet** une collection ordonnée de p objets ($p \in \mathbb{N}^*$).

REMARQUES : • un couple est donc un 2-uplet, et un triplet est un 3-uplet.

- on appelle parfois un p -uplet une p -liste.
- les éléments d'un p -uplet sont parfois appelés coordonnées, composantes ou termes.
- pour distinguer un p -uplet d'une collection non ordonnée, on note ses éléments entre parenthèses :
si $a \neq b$ alors $(a; b) \neq (b; a)$.

DÉFINITIONS

Soient $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ des ensembles. Le **produit cartésien** de ces p ensembles est l'ensemble des p -uplets $(x_1; x_2; x_3; \dots; x_p)$ tels que, pour tout entier i de $\llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E_i$.

On le note $E \times F$ (dire « E croix F »).

REMARQUE : on note souvent E^k le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times E \dots \times E}_{k \text{ fois}}$.

Un k -uplet de E est donc un élément de E^k .

EXEMPLE C1

Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{d; e\}$ alors $E \times F =$

PROPRIÉTÉ (PRINCIPE MULTIPLICATIF)

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis, alors :

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \text{card}(E_3) \times \dots \times \text{card}(E_p).$$

Autrement dit, le cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis est le produit des cardinaux.

Démonstration : par récurrence sur p . Pour l'initialisation, faire un arbre.

EXEMPLE A1

Un code secret est constitué de deux chiffres de 0 à 9 suivis de deux lettres de l'alphabet en majuscule, puis d'un caractère spécial à choisir parmi ? ! % \$ £ #.

Combien de codes secrets différents peut-on constituer ?



p. 31 SF1 (b.)

EXEMPLE A2

tsm-cd-exa2-cor

Une cantine scolaire propose à ses élèves un menu à composer au choix. Ils peuvent choisir entre 4 entrées, 3 plats chauds, puis du fromage ou un yaourt et enfin un dessert ou un fruit.

Combien de menus peuvent-ils composer à la cantine ?

IV. Arrangements et permutations

DÉFINITIONS

Soit E un ensemble à n éléments.

- Un **arrangement** de p éléments de E est un p -uplet d'éléments distincts de E .
- Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E .

EXEMPLE C2

Soit $E = \{m ; a ; t ; h ; e ; i ; u\}$.

1. a) Citer un arrangement de E à 4 éléments :
b) Citer une permutation de E :
2. Le 12-uplet $(m ; a ; t ; h ; e ; m ; a ; t ; h ; i ; e ; u)$ de E est-il un arrangement de E ?

PROPRIÉTÉS

Soit E un ensemble à n éléments.

- Le nombre de permutations de E est $n!$ (« factorielle n »).
- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$. On le note A_n^p .

Démonstrations : faire un arbre.

REMARQUE : $\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-(p-1))$.

EXEMPLES A3 ET A4



Corrigé en vidéo :
hatier-clic.fr/mat033



p. 33 SF2

1. Le tableau final d'un tournoi de judo féminin met en présence quinze athlètes. Le palmarès désigne la gagnante, ainsi que les 2^e, 3^e, 4^e et 5^e au classement final. Combien de palmarès différents peut-il exister ?
2. Lila souhaite ranger verticalement sur une même étagère 5 livres de biologie, 3 livres de mathématiques et 2 livres d'histoire.
 - a) Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?
 - b) Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

EXEMPLES A5 À A7

[tsm-cd-exa567-cor](#)

1. On lance 7 fois une pièce de 1 euro pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Deux joueurs jouent aux dominos, chacun recevant 7 dominos au hasard parmi les 28 dominos composant le jeu. Combien de distributions possibles y a-t-il ?
3. On dispose de quatre gâteaux. Chacun des 4 invités en choisit un pour le manger. Combien de choix possibles y a-t-il ?

V. Nombre de combinaisons

Rappel : contrairement aux arrangements, les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets.

PROPRIÉTÉ

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, qu'on note $\binom{n}{p}$, en le lisant « p parmi n », et qu'on appelle *coefficient binomial*.

Démonstration : le nombre d'arrangements de p éléments de E est A_n^p . On sait que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Mais on peut aussi calculer A_n^p différemment : on choisit d'abord les p éléments, il y a alors $\binom{n}{p}$ choix possibles, puis on peut les placer dans un certain ordre et il y a $p!$ ordres possibles.

D'où : $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$ et le résultat : $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

REMARQUES : • $\binom{n}{0} = 1$ car la seule partie de E ayant 0 élément est \emptyset .

• $\binom{n}{1} = n$ car il existe exactement n parties de E à 1 élément.

EXEMPLES A8 ET A9



p. 35 SF3

1. Au début d'une partie de belote, on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une « main ». Combien existe-t-il de mains différentes possibles ?
2. Neuf amis souhaitent constituer une équipe de volley-ball de plage de 4 joueurs.
 - a) Combien d'équipes différentes peuvent-ils constituer ?
 - b) Parmi les neuf amis, Hector ne veut pas participer à la partie. Combien d'équipes peuvent-ils constituer sans Hector ?
 - c) On sait de plus que Nadia souhaite absolument participer. Combien d'équipes différentes comprenant Nadia peut-on constituer ?

EXEMPLE A10

tsm-cd-exa10-cor

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Parmi ceux-ci, il y a huit jetons blancs avec le numéro 0, cinq jetons rouges avec le numéro 7, quatre jetons blancs avec le numéro 2 et trois jetons rouges avec le numéro 5. On tire simultanément quatre jetons du sac.

1. Combien de tirages possibles y a-t-il ?
2. Combien de tirages y a-t-il avec les quatre numéros identiques ?
3. Combien de tirages y a-t-il avec uniquement des jetons blancs ?
4. Combien de tirages y a-t-il avec des jetons de la même couleur ?
5. Combien de tirages y a-t-il qui permettent de former le nombre 2 020 ?
6. Combien de tirages y a-t-il qui comportent au moins un jeton portant un numéro différent des autres ?

1 Certains utilisent encore la notation C_n^p (pour p choose n).

PROPRIÉTÉS

- **Symétrie** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- Relation du **triangle de Pascal** : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstrations : le nombre d'arrangements de p éléments de E est A_n^p . On sait que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

On peut aussi comprendre cette égalité ainsi : choisir p éléments parmi n revient à observer ceux qu'on ne choisit pas...

-

DÉMO. EX.



tsm-cd-demo1
< 10 min



← cela peut se démontrer de deux façons différentes : par le calcul ou par une méthode combinatoire.



Triangle de Pascal : du nom de Blaise Pascal (1623 – 1662), mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français (né à Clermont-Ferrand).

$\downarrow n \quad p \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1		1					
3	1			1				
4	1				1			
5	1					1		
6	1						1	
7	1							1

PROPRIÉTÉ

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n . Autrement dit : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration :

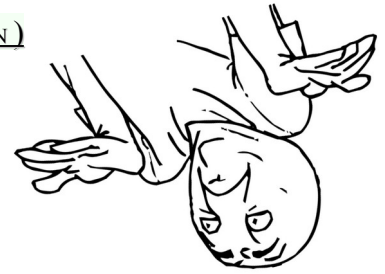
DÉMO. EX.



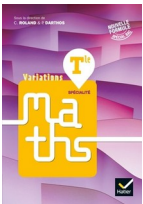
tsm-cd-demo2
< 10 min



REMARQUE : on pourrait aussi démontrer ce résultat « par le calcul », par récurrence sur n .



→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.38
 - QCM 16 questions corrigées → p.39
 - Exercices corrigés → 35 à 47 p.40
 - Exercices type Bac guidés & corrigés → 135 et 136 p.52
-
- QCM 7 questions corrigées → [tsm-cd-mqcm](#)
 - Méthodes et exercices corrigés en vidéo :
 - maths-et-tiques : [tsm-cd-ym](#)
 - jaicompris.com : [tsm-cd-jaicompris](#)

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : LE TRIANGLE DE PASCAL

- Le **triangle de Pascal** est une représentation des coefficients binomiaux dans un triangle. Il est ainsi appelé en Occident, bien qu'il fût étudié bien avant Pascal par d'autres mathématiciens, notamment :
- en Inde
 - en Perse par Al-Karaji (953 – 1029) ou Omar Khayyām (vers 1048 – 1131)
 - au Maghreb par Ibn al-Banna al-Marrakushi (1256 – 1321)
 - en Chine où il est appelé **triangle de Yang Hui**, du nom du mathématicien chinois Yang Hui² né vers 1238 et mort vers 1298
 - en Allemagne par Michael Stifel (1486 – 1567)
 - en Italie où il est appelé **triangle de Tartaglia**, du nom du mathématicien Nicolo Tartaglia (1499 – 1557)
 - en France par François Viète (1540 – 1603).
- C'est cependant Pascal qui consacre à cet outil un traité entier, en 1654 : *Traité du triangle arithmétique*. Il y démontre 19 de ses propriétés, qui étaient déjà connues mais non démontrées.

2 Yang Hui attribue la paternité du triangle au mathématicien chinois du XI^e siècle Jia Xian (vers 1010 – vers 1070).