T$^{\text{le}}$ option MC

MODÈLES DÉFINIS PAR UNE FONCTION

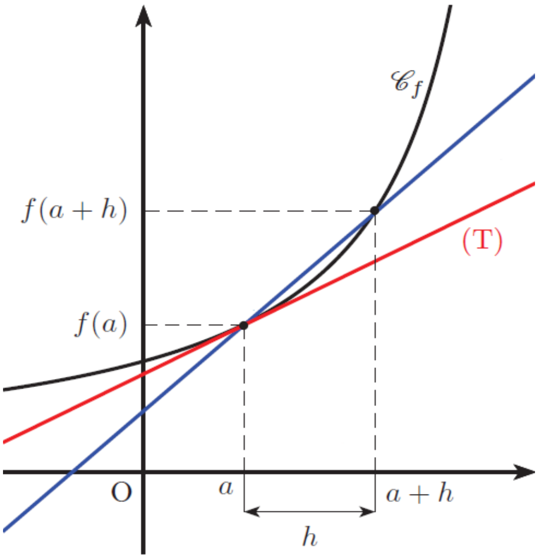
Rappels de Première

Second degré : `1428` (FB) + `1429` (5 SF) + `vers-tomc#a3` (4 exos corrigés en vidéo)

Dérivation : `1430` (FB) + `1431` (5 SF) + `vers-tomc#a4` (5 exos corrigés en vidéo)

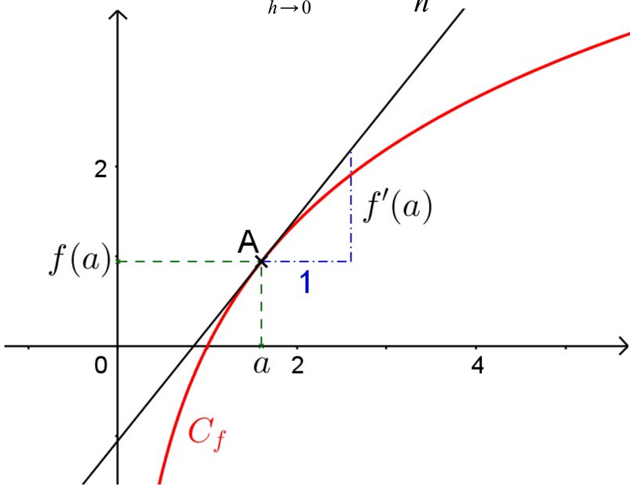
Dérivation et sens de variation : `1432` (FB) + `1433` (2 SF) + `vers-tomc#a5` (2 exos corrigés en vidéo)

Fonction exponentielle : `1434` (FB) + `1435` (5 SF) + `vers-tomc#a6` (5 exos corrigés en vidéo)



Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



I. Dérivation : deux nouvelles formules

PROPRIÉTÉ (RAPPEL DE 1$^{\text{ère}}$)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.

Soient a et b deux réels.

Si f est dérivable sur J, alors la fonction g définie sur I par $g(x)=f(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I : $g'(x)=a\times f'(ax+b)$.

PROPRIÉTÉS

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction u^2 est dérivable sur I : $(u^2)'=2u'u$. ← *admise*
- La fonction e^u est dérivable sur I : $(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$.

Démonstration :

Exemples C1 et C2

1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty ; \frac{4}{3}\right]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+4}$.

Justifier que f est dérivable sur $\left]-\infty ; \frac{4}{3}\right[$ et déterminer f'.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\left(-8x^5+7x^4-6x^3+5x-4\right)^2$.

Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'.

Exemple A1

p. 11 capacité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x+1)e^{x^2}$.

Tracer C_f, la courbe représentative de f, sur une calculatrice. Tracer la tangente τ à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier les variations de f.

3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente τ.

b. Étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la tangente τ.

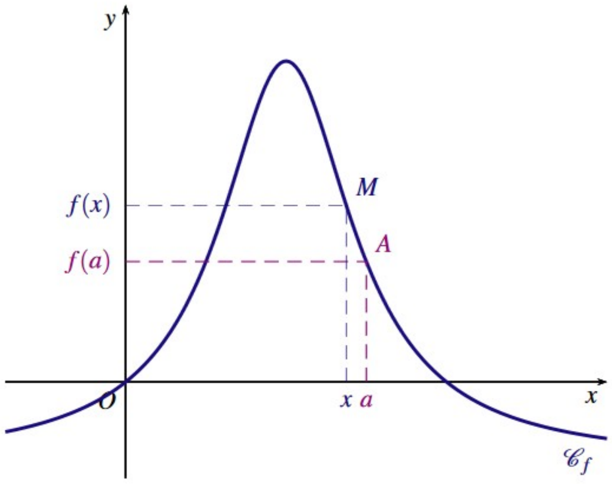
II. Continuité d'une fonction

II.1 En un seul coup de crayon

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

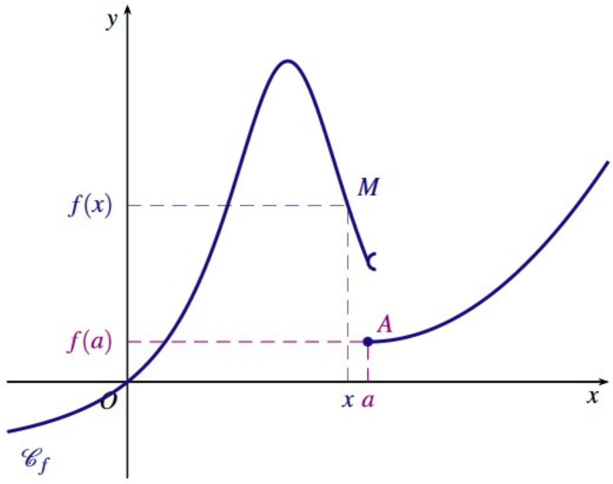
> **DÉFINITION INTUITIVE**
>
> On dit que f est ***continue*** sur I si sa courbe représentative peut être tracée « sans lever le crayon » (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

Exemples



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.

La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.

Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

Source des images : http://yallouz.arie.free.fr

REMARQUE : de façon plus rigoureuse, on dit que f est continue en un réel a lorsque : $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{I}}} f(x) = f(a)$.

Et on dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout réel de I .

PROPRIÉTÉS (ADMISES)

• Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus, cosinus sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

• Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sur un intervalle sont continues sur cet intervalle.

THÉORÈME (ADMIS)

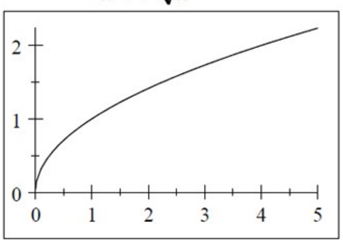
Si f est dérivable en un réel a , alors f est continue en a .

Convention dans un tableau de variations

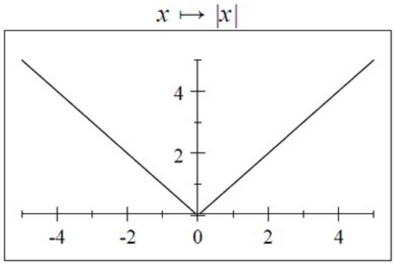
Une flèche dans un tableau de variations d'une fonction f indique :
– la stricte croissance ou la stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant
– la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

REMARQUE : la réciproque est fausse.
Par exemple, les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues en 0 mais non dérivable en 0.

$x \mapsto \sqrt{x}$



$x \mapsto |x|$



Source des images : http://yallouz.arie.free.fr

Il existe même des fonctions continues sur un intervalle mais dérivables nulle part !
↳ voir mathemathieu.fr/1539 (pages 6 et 7)

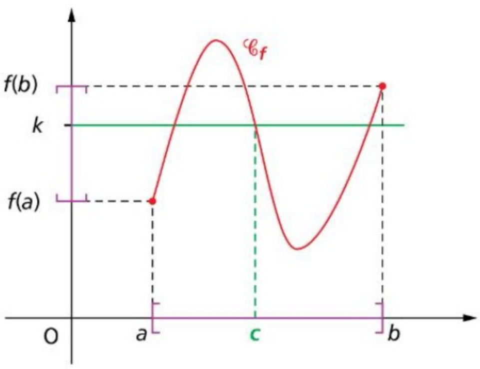
II.2 TVI

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (ADMIS)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.



Pourquoi est-il nécessaire que f soit continue sur l'intervalle I ?

COROLLAIRE DU TVI

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, strictement monotone sur I.

Soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$

Démonstration : L'existence d'une solution à l'équation $f(x)=k$ est assurée par le TVI.

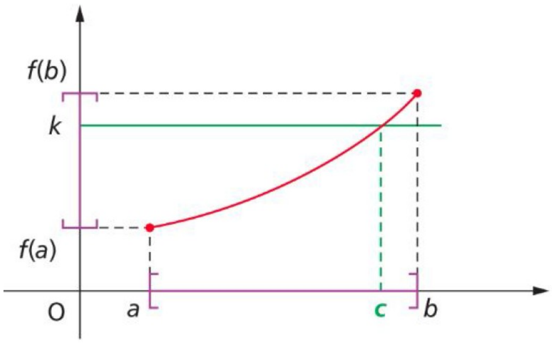
Démontrons par l'absurde l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux réels distincts α et α' de l'intervalle $[a;b]$ solutions de l'équation $f(x)=k$.

Si α est le plus petit des deux réels, alors $\alpha<\alpha'$.

Or, f est strictement monotone sur I donc $f(\alpha)<f(\alpha')$ ou $f(\alpha)>f(\alpha')$.

Ceci est absurde puisque $f(\alpha)=f(\alpha')=k$.



Remarque : ces théorèmes s'appliquent aussi lorsque l'intervalle I est de la forme $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$; $[a;+\infty[$; $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

Exemple C3

On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$.

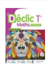
1. Étudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution notée α.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Exemple A2


p. 13 capacité 3

Soit la fonction f définie sur $[-1;2]$ par $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$.

On admet le tableau de variations de f donné ci-contre.

x	-1	1	2
$f(x)$	18 ↘	2 ↗	9

1. a. Quel est le minimum de la fonction f sur $[-1;2]$?

b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

2. a. Déterminer le nombre de solutions sur l'intervalle $[-1;2]$ de l'équation $f(x)=10$.

b. Déterminer, en utilisant la calculatrice, un encadrement au dixième de chacune des solutions.

3. Reprendre la question 2. pour $f(x)=5$.

Exemple A3

En vidéo : hatier-clic.fr/mat261

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=e^x-x$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur ℝ.

b. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet exactement deux solutions de signes contraires dans ℝ.

c. On note α la solution positive de l'équation $f(x)=2$. À l'aide d'un outil numérique, donner un encadrement de α au dixième.

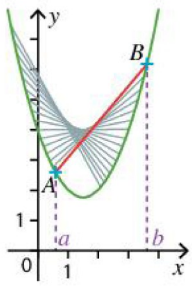
III. Convexité/concavité et point d'inflexion d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

DÉFINITION

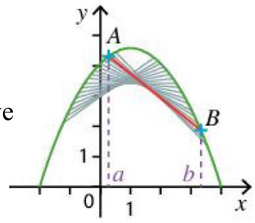
• On dit que f est ***convexe*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en <u>dessous</u> de chacune de ses cordes.

• On dit que f est ***concave*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située <u>au-dessus</u> de chacune de ses cordes (autre définition : si $-f$ est convexe).



← convexe

→ concave



source des images :
éd. Hachette, coll. Barbazo, 2020

THÉORÈMES (ADMIS)

Si f est dérivable sur I :

• f est ***convexe*** si et seulement si f' est ***croissante*** sur I

• f est ***concave*** si et seulement si f' est ***décroissante*** sur I

COROLLAIRES

Si f est deux fois dérivable sur I : *se lit « f seconde »*

• f est ***convexe*** si et seulement si f'' est ***positive*** sur I

• f est ***concave*** si et seulement si f'' est ***négative*** sur I

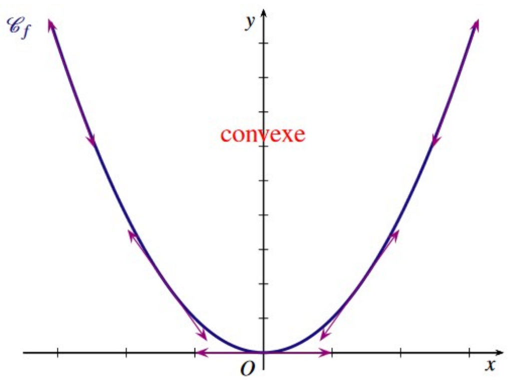
THÉORÈMES (ADMIS)

Si f est dérivable sur I :

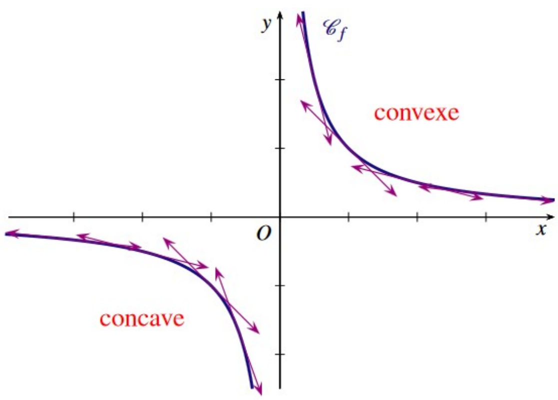
• f est ***convexe*** si et seulement C_f est entièrement située ***au-dessus*** de chacune de ses ***tangentes***.

• f est ***concave*** si et seulement C_f est entièrement située ***en dessous*** de chacune de ses ***tangentes***.

<u>EXEMPLES</u> :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

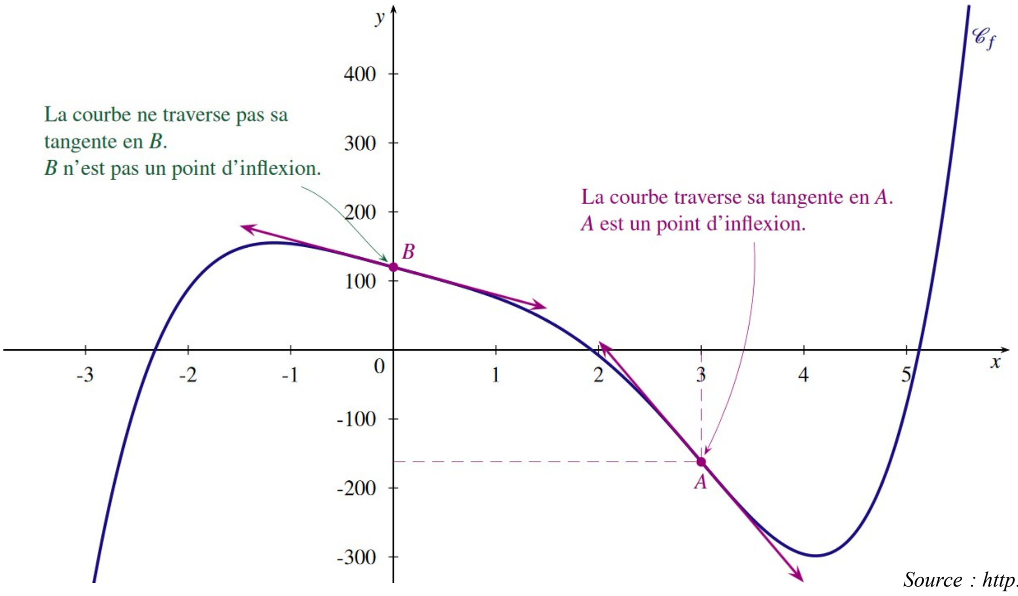
Source des images : http://yallouz.arie.free.fr

DÉFINITION

On note C_f la courbe représentative de *f*. S'il existe un point A de C_f tel que cette dernière « traverse » sa tangente en A, on dit que A est un ***point d'inflexion*** de C_f .

Plus précisément, un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de convexité.

EXEMPLE :



Source : http://yallouz.arie.free.fr

EXEMPLE C4

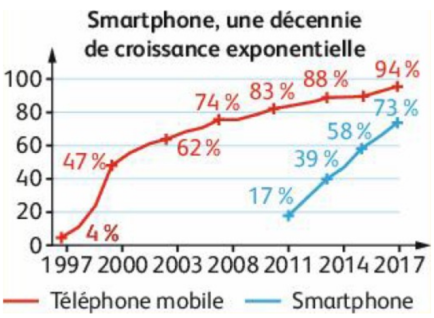
La courbe ci-dessus est celle de la fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^5-5x^4-40x+120$.

Démontrer que sa courbe admet un unique point d'inflexion.

EXEMPLE A4

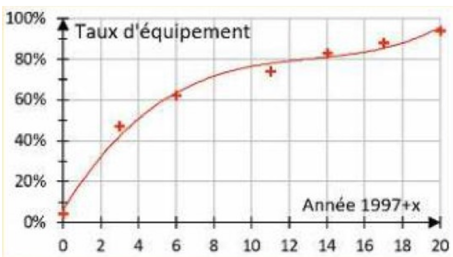
 p. 15 capacité 4

Le graphique ci-contre nous donne le taux d'équipement de la population de 12 ans et plus en téléphone mobile en en smartphone.



1. Commenter le titre de l'article *Smartphone, une décennie de croissance exponentielle*.

À l'aide d'un tableur, on décide de modéliser le taux d'équipement en téléphone mobile par une fonction *f* dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



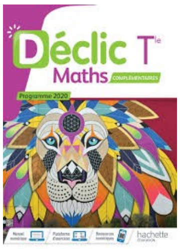
2. a. Avec la précision permise par le graphique, étudier la convexité de la fonction *f*.

b. En quel point la courbe semble-t-elle présenter un point d'inflexion ?

3. Interpréter graphiquement les conséquences de l'entrée sur le marché des smartphones en 2011 sur le taux d'équipement en téléphone mobile.

REMARQUE : une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



• Fiche bilan → p.18

• QCM 18 questions corrigées → p.19

• Dresser et exploiter un tableau de variations → capacité 2 p.16

• Étudier la convexité, la concavité d’une fonction deux fois dérivable → capacité 5 p.17