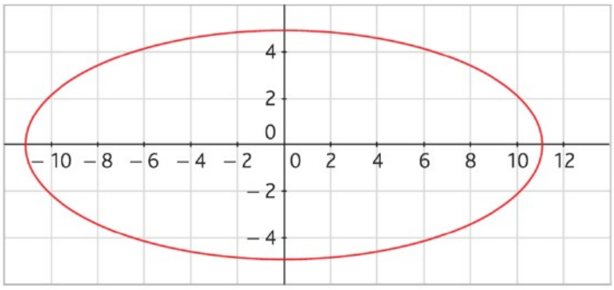
Exercice 1

1. Si on divise un entier a par 18, son reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

2. Si on divise un entier a par 6, son reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de a par 18 ?

Exercice 2

On a représenté une ellipse dont une équation est $x^2+5y^2=123$.



En raisonnant modulo 5, montrer qu'il n'existe pas de points à coordonnées entières appartenant à l'ellipse.

Exercice 3

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste dans la division euclidienne par 5 de 2^n.
Idem pour 3^n.

2. En déduire pour quelles valeurs de l'entier n le nombre 1188^n+2257^n est divisible par 5.

Exercice 4

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs : $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$.

1. Montre que toute racine entière de P non nulle divise a_0.

2. En déduire que le polynôme $x^3-2x^2+4x-10$ n'a pas de racine entière.

Exercice 5

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. Si $ab \equiv 0$ [6] alors $a \equiv 0$ [6] ou $b \equiv 0$ [6].

2. Si $2x \equiv 4$ [12] alors $x \equiv 2$ [12].

3. Si $2x \equiv 4$ [12] alors $x \equiv 2$ [6].

4. Si $a \equiv 2$ [10] alors $4a \equiv 8$ [10].

5. Si $7-x \equiv 5$ [3] alors $x \equiv 2$ [3].

6. Si $a \equiv 4$ [9] alors $5a \equiv 20$ [9].

7. Pour tout entier x, $x^5 \equiv x$ [4].

Exercice 6

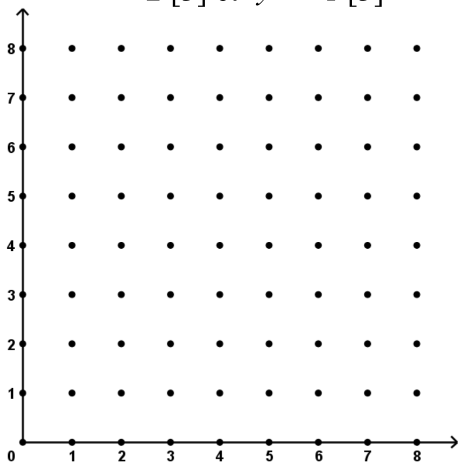
Soient a et b deux entiers naturels. On appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthogonal, dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont des entiers vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant b\ .$$

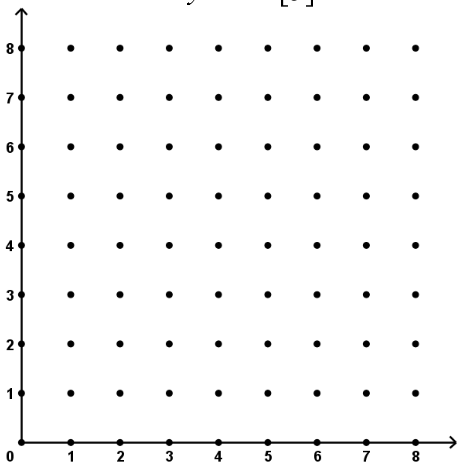
On note $\mathrm{R}_{a,b}$ ce réseau.

Représenter graphiquement les points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du réseau $\mathrm{R}_{8,8}$ vérifiant :

$x \equiv 2\ [3]$ et $y \equiv 1\ [3]$



$x+y \equiv 1\ [3]$



$x \equiv y\ [3]$