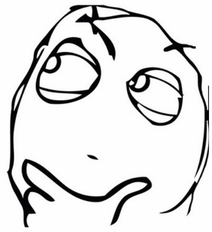
Tle spé

SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES ET LOI BINOMIALE

Question d'introduction



Une maladie (exemple : cancer) est présente dans une population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000, soit 0,01 %.

Un patient vient de passer un test pour le dépistage de cette maladie.
Le médecin le convoque pour lui annoncer le résultat : mauvaise nouvelle, il est positif.
Il lui indique alors que ce test est plutôt fiable :

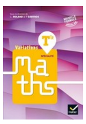
« Si vous avez cette maladie, le test sera positif dans 99 % des cas.
Si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 99,8 % des cas ».

À votre avis, puisque le test est positif, quelle est la probabilité que le patient ait la maladie ?

☐ 90 % ? ☐ 80 % ☐ 70 % ☐ 60 % ☐ moins de 60 % ☐ moins de 30 %

→ Solution détaillée : https://www.mathemathieu.fr/64-thm-bayes ←

Rappels de Première



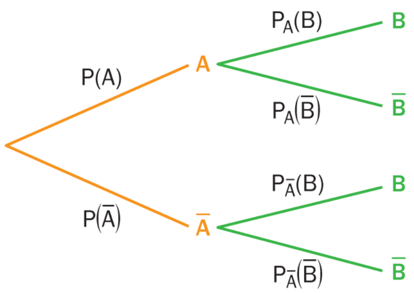
cours → p.400

9 exercices corrigés → p.401

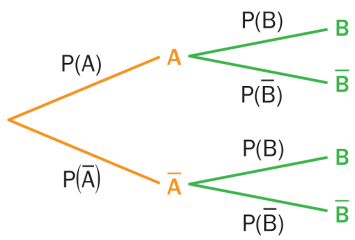
Rappels sur les probabilités conditionnelles :
tsm-seilb-rap-fb tsm-seilb-rap-sf

I. Succession d'épreuves

Dans le cas de deux épreuves non indépendantes :



Dans le cas de deux épreuves indépendantes :



On a alors :

PROPRIÉTÉ

Lors d'une succession de n épreuves <u>indépendantes</u>, la probabilité d'une issue $(x_1;x_2;x_3;...;x_n)$ est égale au produit des probabilités de ses composantes x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

II. Loi binomiale

DÉFINITIONS

• Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire à deux issues : le succès ou l'échec.

• En notant p la probabilité du succès d'une épreuve de Bernoulli, et X la variable aléatoire qui associe un succès à 1 et un échec à 0 : X suit la ***loi de Bernoulli de paramètre p***.

Autrement dit : $p(X=0)=1-p$ et $p(X=1)=p$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=p$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=p(1-p)$.

<u>Démonstrations</u> : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times \mathrm{p}(\mathrm{X}=0)+1\times \mathrm{p}(\mathrm{X}=1)=0+p=p$

et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)(0-p)^2+\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)(1-p)^2=(1-p)\,p^2+p(1-p)^2=\ldots=(1-p)\,p$

DÉFINITION

Un ***schéma de Bernoulli de paramètres n et p*** est la répétition de n épreuves de Bernoulli <u>identiques</u> et <u>indépendantes</u>, où p est la probabilité du succès.

PROPRIÉTÉ

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès.

Pour tout entier k compris entre 0 et n : $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

DÉFINITION

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, et on note : $\mathrm{X}\sim\mathcal{B}(n\,;p)$.

<u>Démonstration</u> : page 412 ou

DÉMO. EX.
tsm-seilb-demo1
< 10 min

<u>EXEMPLE A1</u>


p. 407 SF2

Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite un dé équilibré à six faces.
Le joueur gagne lorsque le 1 apparaît au moins trois fois sur les quatre lancers.

a. Justifier que ce jeu peut être modélisé par un schéma de Bernoulli.
b. Représenter ce jeu par un arbre pondéré.
c. Calculer la probabilité des événements :
A : « le joueur n'obtient aucun 1 »
B : « le joueur obtient exactement un 1 »
C : « le joueur obtient exactement deux 1 ».
d. Calculer la probabilité pour un joueur de gagner à ce jeu.

PROPRIÉTÉ

Soit $\mathrm{X}\sim\mathcal{B}(n\,;p)$. Alors : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\,p$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=n\,p(1-p)$.

<u>Démonstrations</u> : • $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{n}k\times \mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Observer que : $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$. Puis : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=0+\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\,p\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}=n\,p\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$

Or, d’après le binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = (p+1-p)^{n-1} = 1$

d’où $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n\,p$

- $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = n\,p(1-p)$ est admis et pourra être démontré plus tard.

Exemple A2

p. 409 SF3

Dans un examen, un QCM comporte huit questions.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.
La variable aléatoire X donne le nombre total de bonnes réponses.
On arrondira les résultats au millième.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l’espérance de X. Interpréter ce résultat.
3. Calculer la probabilité d’avoir :
  a. quatre bonnes réponses ;
  b. au plus cinq bonnes réponses ;
  c. entre deux et cinq bonnes réponses.

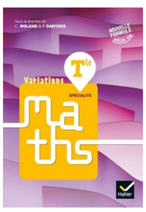
Exemple A3

p. 411 SF4

Au cours d’une soirée, un restaurant accueille 45 convives.
Pour un convive quelconque, il est établi par le restaurateur que la probabilité qu’il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l’issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(45\,;\,0{,}8)$.

1. a. Dans une feuille de calcul d’un tableur, afficher les valeurs de k et les probabilités $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)$ correspondantes pour $0 \leqslant k \leqslant 45$.
b. Donner les valeurs de k pour lesquelles $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k) \geqslant 0{,}1$.
2. Toujours à l’aide du tableur, afficher dans un tableau les probabilités cumulées croissantes $\mathrm{p}(\mathrm{X} \leqslant k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 45$.
3. a. Déterminer le plus petit nombre entier a tel que $\mathrm{p}(\mathrm{X} \leqslant a) \geqslant 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte.
b. Déterminer le plus grand nombre entier b tel que $\mathrm{p}(\mathrm{X} \leqslant b) \leqslant 0{,}1$.
c. Déterminer un intervalle $[\![c\,;d]\!]$ d’amplitude minimale tel que $\mathrm{p}(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d) \geqslant 0{,}95$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.414
- QCM 12 questions corrigées → p.415
- Exercices corrigés → 31 à 38 p.416
- Exercice type Bac guidé & corrigé → 104 p.428

- Méthodes et exercices corrigés en vidéo : → maths-et-tiques : tsm-seilb-ym