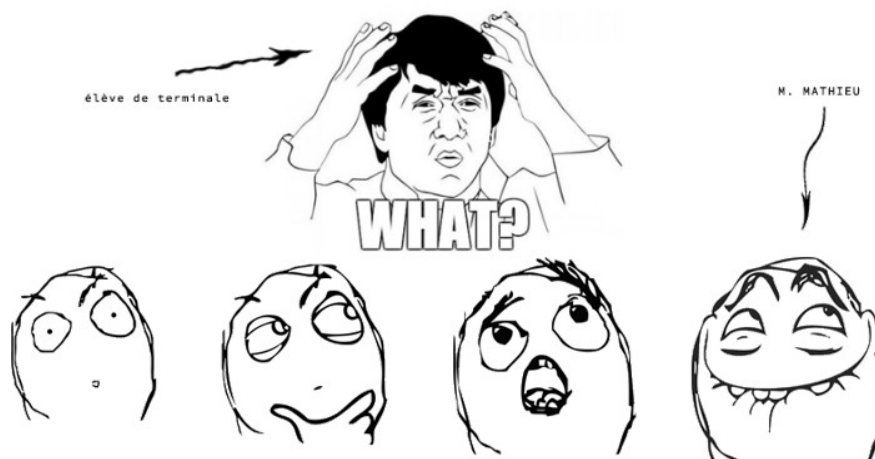


Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$



- *symétrique* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- *forme bilinéaire* : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et pour tout réel λ : $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- *définie positive* : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

PROPRIÉTÉS Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs \vec{u} ou \vec{v} est nul.

Sinon : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$. *formules de polarisation*

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \vec{u} \cdot \vec{v}$

et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

REMARQUE : les formules de polarisation permettent de retrouver le produit scalaire à l'aide de la norme.

I.2 Expression analytique

PROPRIÉTÉ

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère **orthonormé** de l'espace.

Soient $\vec{u} (x; y; z)$ et $\vec{v} (x'; y'; z')$ deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$.

Démonstration :

Écrire les vecteurs \vec{u} et \vec{v} en fonction de \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} , calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant la linéarité et en observant que : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

I.3 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace, et quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
On dit que \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** si (AB) et (CD) sont orthogonales.

REMARQUE : par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur ($\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$).

PROPRIÉTÉ

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace.

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Soient trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

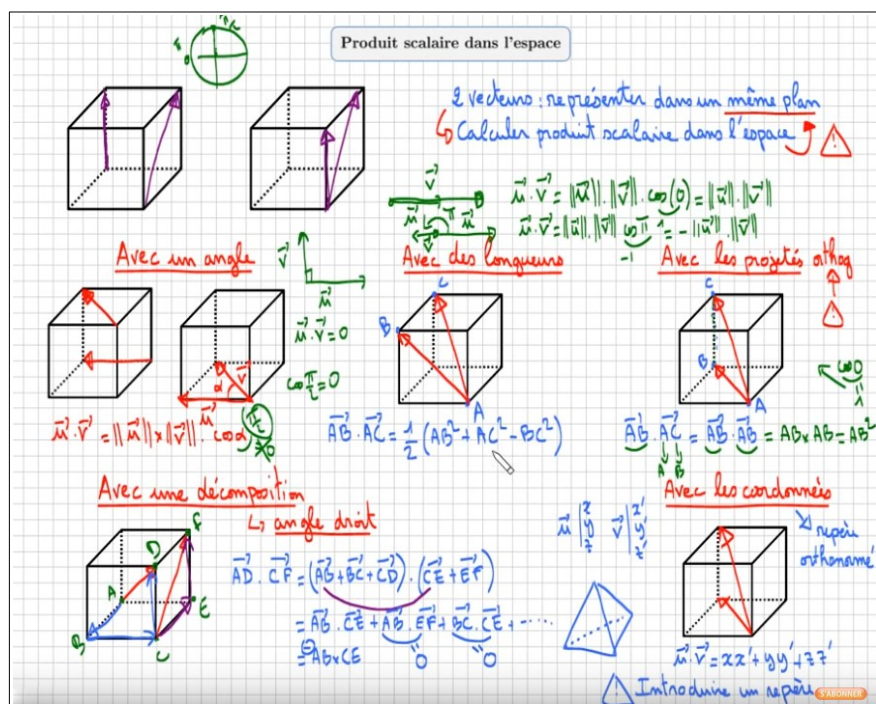
Dans un plan contenant les points A, B et C, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Alors : \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux \Leftrightarrow (AB) et (AC) sont orthogonales

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Bilan à voir (< 17 min) :
https://youtu.be/QeOoSKyL_dw



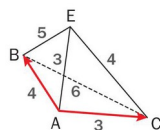
EXEMPLE A1

Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

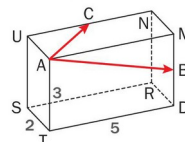
a. ABCDEFGH est un cube d'arête 2 cm.

b. ADBGFCH est un cube d'arête 3 cm.

c. ABCE est un tétraèdre (l'unité est le cm) :



d. AMNUTDRS est un pavé droit, C est le milieu de [UN] et B est le milieu de [MD] (l'unité est le cm) :



p. 95 SF1

II. Plans de l'espace

II.1 Orthogonalité de deux droites

DÉFINITION

Deux droites D et D' sont orthogonales dans l'espace lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

REMARQUE : il ne faut pas confondre orthogonale et perpendiculaire.

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et donc pas nécessairement sécantes.
- Donc « deux droites perpendiculaires sont orthogonales ».

La réciproque est fausse.

- Attention : deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles !

PROPRIÉTÉ

Soient (d) et (d') deux droites de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} .

(d) et (d') sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

On choisit un point A de l'espace, et on note B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

D'après la propriété du I.3 : $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

d'où le résultat.

II.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DÉFINITION

Une droite D est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toutes les droites du plan P .

PROPRIÉTÉ

Une droite D est orthogonale à un plan P si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan P .

Démonstration : Le sens direct est évident.

Si D est orthogonale à deux droites D_1 et D_2 du plan P , en notant \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs directeurs respectifs de D , D_1 et D_2 , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

\vec{v} et \vec{w} ne sont pas colinéaires puisque D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Soit d une droite du plan P . On note \vec{z} un vecteur directeur de d : $\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \vec{z} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$.

Alors : $\vec{u} \cdot \vec{z} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Donc toute droite d de P est orthogonale à D .

EXEMPLE A2

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [CH] et J celui de [FC].

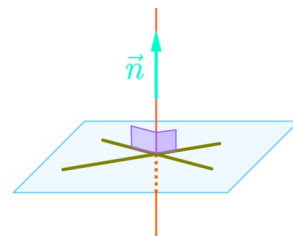
- Montrer de deux façons différentes que (AG) et (CFH) sont orthogonaux.
- Montrer de deux façons différentes que (AG) et (IJ) sont orthogonales.



II.3 Vecteur normal à un plan

DÉFINITION

Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est dit **normal** à un plan P s'il est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P .



PROPRIÉTÉ (ADMISE)

A est un point de l'espace et \vec{n} un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan (passant par A et de vecteur normal \vec{n}).

III. Calculs de distances

Dans tout cette partie, on munit l'espace d'un repère **orthonormé**.

III.1 Distance entre deux points

PROPRIÉTÉ

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.

Alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Démonstration : évidente car $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$.

III.2 Distance entre un point et un plan

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soit P un plan et A un point de l'espace.

Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à P .

DÉFINITION

On appelle **projeté orthogonal** de A sur P l'intersection de cette unique droite et de P .

DÉFINITION

On appelle **distance d'un point A à un plan P** la plus petite longueur AM où $M \in P$.

PROPRIÉTÉ

On note H le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P : la distance de A à P est égale à AH , et

$AH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ pour tout point M du plan P , où \vec{n} est un vecteur normal du plan P .

Démonstration :

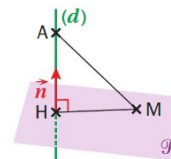
Pour tout point M du plan distinct tel que $M \neq H$, AHM est rectangle en H .

L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle donc : $AM > AH$.

La distance de A à P est donc AH .

De plus, $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|$ car H est aussi le projeté orthogonal de M sur (AH) .

Donc $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$ car \overrightarrow{AH} et \vec{n} sont colinéaires. D'où le résultat.



III.3 Distance entre un point et une droite

PROPRIÉTÉ (ADMISE)

Soient (d) une droite et A un point de l'espace.

Il existe une unique droite (d') passant par A et perpendiculaire à (d) .

DÉFINITION

On appelle *projeté orthogonal* de A sur (d) l'intersection de cette unique droite et de (d) .

DÉFINITION

On appelle *distance d'un point A à une droite* (d) la plus petite longueur AM où $M \in (d)$.

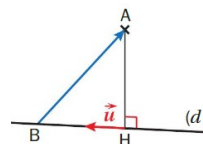
PROPRIÉTÉ

On note H le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) : la distance de A à (d) est égale à AH.

Démonstration : identique à la précédente.

REMARQUE : on pourrait démontrer que cette distance est égale à

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} \right)^2}. \text{ Voir page 100 pour une démonstration.}$$



→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←



- Fiche bilan → p.102
- QCM 10 questions corrigées → p.103
- Exercices corrigés → 34 à 44 p.104
- 2 exercices type Bac guidés & corrigés → 133 et 134 p.116

• Méthodes et exercices corrigés en vidéo :

→ maths-et-tiques : tsm-ode-ym