| TOME | ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES |
|---|---|

Cette fiche propose 100 exercices aléatoires (corrigés !)
de résolutions d'équations diophantiennes du type $ax + by = c$
avec $a$, $b$ et $c$ compris entre 0 et 100.

* pas de solutions ** coefficients premiers entre eux *** coefficients non premiers entre eux
Le symbole ♥ indique une équation diophantienne dont une solution particulière est évidente et ne nécessite donc pas de remonter un algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de Bézout.
Le symbole # indique une équation diophantienne qui, après division par le PGCD de $a$ et $b$, est du type $x + by = c$ où $ax + y = c$, et qui est donc rapidement résolue.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ** | ♥ | Exercice n°1 : | résoudre l'équation diophantienne 5x + 52y = 84. |
| * | | Exercice n°2 : | résoudre l'équation diophantienne 100x + 90y = 89. |
| ** | | Exercice n°3 : | résoudre l'équation diophantienne 41x + 86y = 70. |
| ** | | Exercice n°4 : | résoudre l'équation diophantienne 88x + 75y = 17. |
| ** | | Exercice n°5 : | résoudre l'équation diophantienne 87x + 86y = 25. |
| * | | Exercice n°6 : | résoudre l'équation diophantienne 72x + 2y = 67. |
| *** | | Exercice n°7 : | résoudre l'équation diophantienne 26x + 48y = 28. |
| ** | ♥ | Exercice n°8 : | résoudre l'équation diophantienne 33x + 91y = 66. |
| *** | | Exercice n°9 : | résoudre l'équation diophantienne 33x + 63y = 51. |
| ** | | Exercice n°10 : | résoudre l'équation diophantienne 15x + 4y = 93. |
| ** | | Exercice n°11 : | résoudre l'équation diophantienne 83x + 19y = 69. |
| * | | Exercice n°12 : | résoudre l'équation diophantienne 26x + 88y = 31. |
| ** | | Exercice n°13 : | résoudre l'équation diophantienne 42x + 37y = 12. |
| ** | | Exercice n°14 : | résoudre l'équation diophantienne 83x + 42y = 65. |
| ** | | Exercice n°15 : | résoudre l'équation diophantienne 51x + 61y = 62. |
| *** | | Exercice n°16 : | résoudre l'équation diophantienne 60x + 62y = 44. |
| * | | Exercice n°17 : | résoudre l'équation diophantienne 48x + 80y = 21. |
| ** | | Exercice n°18 : | résoudre l'équation diophantienne 65x + 43y = 53. |
| *** | | Exercice n°19 : | résoudre l'équation diophantienne 60x + 85y = 20. |
| *** | | Exercice n°20 : | résoudre l'équation diophantienne 90x + 86y = 50. |
| * | | Exercice n°21 : | résoudre l'équation diophantienne 7x + 14y = 46. |
| *** | | Exercice n°22 : | résoudre l'équation diophantienne 88x + 28y = 16. |
| ** | | Exercice n°23 : | résoudre l'équation diophantienne 37x + 25y = 64. |
| * | | Exercice n°24 : | résoudre l'équation diophantienne 24x + 76y = 46. |
| * | | Exercice n°25 : | résoudre l'équation diophantienne 78x + 69y = 16. |
| *** | | Exercice n°26 : | résoudre l'équation diophantienne 70x + 64y = 38. |
| ** | | Exercice n°27 : | résoudre l'équation diophantienne 68x + 11y = 65. |
| ** | | Exercice n°28 : | résoudre l'équation diophantienne 76x + 39y = 61. |
| *** | | Exercice n°29 : | résoudre l'équation diophantienne 93x + 42y = 99. |
| * | | Exercice n°30 : | résoudre l'équation diophantienne 15x + 10y = 32. |
| ** | | Exercice n°31 : | résoudre l'équation diophantienne 49x + 87y = 77. |
| *** | # | Exercice n°32 : | résoudre l'équation diophantienne 2x + 60y = 24. |
| *** | # | Exercice n°33 : | résoudre l'équation diophantienne 18x + 9y = 18. |
| *** | ♥ | Exercice n°34 : | résoudre l'équation diophantienne 62x + 32y = 94. |
| ** | ♥ | Exercice n°35 : | résoudre l'équation diophantienne 31x + 83y = 83. |
| ** | | Exercice n°36 : | résoudre l'équation diophantienne 6x + 79y = 7. |
| ** | | Exercice n°37 : | résoudre l'équation diophantienne 89x + 3y = 10. |
| ** | | Exercice n°38 : | résoudre l'équation diophantienne 57x + 100y = 33. |
| *** | | Exercice n°39 : | résoudre l'équation diophantienne 86x + y = 19. |
| *** | | Exercice n°40 : | résoudre l'équation diophantienne 82x + 80y = 32. |
| ** | | Exercice n°41 : | résoudre l'équation diophantienne 93x + 32y = 39. |
| *** | # | Exercice n°42 : | résoudre l'équation diophantienne 2x + 84y = 18. |
| *** | | Exercice n°43 : | résoudre l'équation diophantienne 98x + 18y = 66. |
| *** | | Exercice n°44 : | résoudre l'équation diophantienne 51x + 24y = 42. |

*** # Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne $3x + 96y = 24$.
** Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne $47x + 20y = 8$.
** Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne $11x + 4y = 9$.
** Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 91y = 16$.
*** Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 90y = 66$.
*** ♥ Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne $14x + 63y = 63$.
* Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$.
** Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne $12x + 67y = 77$.
** Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 91y = 89$.
** ♥ Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne $67x + 50y = 67$.
* Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$.
*** ♥ Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne $100x + 18y = 64$.
* Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne $90x + 51y = 2$.
** Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 74y = 11$.
*** Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 62y = 96$.
*** Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne $50x + 78y = 26$.
*** Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 10y = 66$.
** Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne $81x + 46y = 23$.
*** ♥ Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne $72x + 57y = 60$.
** ♥ Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 17y = 74$.
*** # Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 54y = 6$.
*** Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 63y = 84$.
** Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne $91x + 48y = 23$.
*** ♥ Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 22y = 48$.
** Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne $79x + 89y = 26$.
** Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne $45x + 26y = 34$.
* Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$.
*** ♥ Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 45y = 6$.
*** ♥ Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 44y = 8$.
*** ♥ Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 78y = 66$.
*** Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne $16x + 94y = 24$.
** Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 24y = 13$.
*** Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 46y = 34$.
* Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$.
*** Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne $6x + y = 100$.
** ♥ Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 30y = 30$.
*** # Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne $30x + 2y = 26$.
** ♥ Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne $97x + 56y = 15$.
*** Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 92y = 98$.
** Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne $21x + 55y = 46$.
*** Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 74y = 38$.
** Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 71y = 54$.
* Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$.
*** Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 93y = 90$.
*** Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne $54x + 56y = 92$.
* Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$.
** Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne $84x + 97y = 91$.
*** Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne $32x + 14y = 44$.
*** Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 60y = 45$.
* Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$.
** ♥ Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne $29x + 15y = 59$.
*** Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne $66x + 56y = 88$.
*** Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne $75x + 6y = 78$.
*** Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 87y = 51$.
*** Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne $62x + 68y = 28$.
** Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne $99x + 83y = 19$.

Exercice n°1 : résoudre l'équation diophantienne $5x + 52y = 84$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 52 et 5 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 52 | = | 5 | × | 10 | + | 2 |
| (2) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(5, 52) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(-4, 2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 52 et 5) et en multipliant par 84, on aurait trouvé la solution particulière (1764, -168).

• Si x et y sont solutions de l'équation $5x + 52y = 84$ :

$5x + 52y = 84$ et $5 \times (-4) + 52 \times 2 = 84$

donc, par soustraction : $5(x + 4) + 52(y - 2) = 0$

donc $5(x + 4) = 52(2 - y)$. (*)

Or, 5 et 52 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $5 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $2 - y = 5k$

et alors, d'après (*): $x + 4 = 52k$.

• Réciproquement, si $x = -4 + 52k$ et $y = 2 - 5k$ alors :

$5x + 52y = 5(-4 + 52k) + 52(2 - 5k) = \ldots$ (à faire) $= 84$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $5x + 52y = 84$ sont les couples $(-4 + 52k, 2 - 5k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°2 : résoudre l'équation diophantienne $100x + 90y = 89$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 90 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 100 | = | 90 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 90 | = | 10 | × | 9 | + | 0 |

donc PGCD(100, 90) = 10.

• $89 = 10 \times 8 + 9$ donc 10 ne divise pas 89
donc l'équation diophantienne $100x + 90y = 89$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°3 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 86y = 70$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 86 et 41 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 86 | = | 41 | × | 2 | + | 4 |
| (2) | 41 | = | 4 | × | 10 | + | 1 |
| (3) | 4 | = | 1 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(41, 86) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 41 | × | 1 | + | 4 | × | (-10) |
| (1) | 1 | = | 41 | × | 1 | + | (86-41×2) | × | (-10) |
| | 1 | = | 86 | × | (-10) | + | 41 | × | 21 |

On a donc : $41 \times 21 + 86 \times (-10) = 1$

puis en multipliant par 70 : $41 \times 1470 + 86 \times (-700) = 70$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 86y = 70$ :

$41x + 86y = 70$ et $41 \times 1470 + 86 \times (-700) = 70$

donc, par soustraction : $41(x - 1470) + 86(y + 700) = 0$

donc $41(x - 1470) = 86(-700 - y)$. (*)

Or, 41 et 86 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid -700 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-700 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x - 1470 = 86k$.

• Réciproquement, si $x = 1470 + 86k$ et $y = -700 - 41k$ alors :

$41x + 86y = 41(1470 + 86k) + 86(-700 - 41k) = \ldots$ (à faire) $= 70$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $41x + 86y = 70$ sont les couples $(1470 + 86k, -700 - 41k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°4 : résoudre l'équation diophantienne 88x + 75y = 17.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 75 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 88 | = | 75 | × | 1 | + | 13 |
| (2) | 75 | = | 13 | × | 5 | + | 10 |
| (3) | 13 | = | 10 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 10 | = | 3 | × | 3 | + | 1 |
| (5) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(88, 75) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 10 | × | 1 | + | 3 | × | (-3) |
| (3) | 1 | = | 10 | × | 1 | + | (13-10×1) | × | (-3) |
| | 1 | = | 13 | × | (-3) | + | 10 | × | 4 |
| (2) | 1 | = | 13 | × | -3 | + | (75-13×5) | × | 4 |
| | 1 | = | 75 | × | 4 | + | 13 | × | (-23) |
| (1) | 1 | = | 75 | × | 4 | + | (88-75×1) | × | (-23) |
| | 1 | = | 88 | × | (-23) | + | 75 | × | 27 |

On a donc : 88 × (-23) + 75 × 27 = 1
puis en multipliant par 17 : 88 × (-391) + 75 × 459 = 17.

• Si x et y sont solutions de l'équation 88x + 75y = 17 :
88x + 75y = 17 et 88 × (-391) + 75 × 459 = 17
donc, par soustraction : 88(x + 391) + 75(y - 459) = 0
donc 88(x + 391) = 75(459 - y). (*)
Or, 88 et 75 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 88 | 459 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que 459 - y = 88$k$
et alors, d'après (*): x + 391 = 75$k$.

• Réciproquement, si x = -391 + 75$k$ et y = 459 - 88$k$ alors :
88x + 75y = 88(-391 + 75$k$) + 75(459 - 88$k$) = ... (à faire) = 17.

• Conclusion : les solutions de l'équation 88x + 75y = 17 sont les couples (-391 + 75$k$, 459 - 88$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°5 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 86y = 25$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 86 :

$$(1) \quad 87 = 86 \times 1 + 1$$
$$(2) \quad 86 = 1 \times 86 + 0$$

donc PGCD(87, 86) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(1) \quad 1 = 87 \times 1 + 86 \times (-1)$$

Puis en multipliant par 25 : $87 \times 25 + 86 \times (-25) = 25$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $87x + 86y = 25$ :

$87x + 86y = 25$ et $87 \times 25 + 86 \times (-25) = 25$

donc, par soustraction : $87(x - 25) + 86(y + 25) = 0$

donc $87(x - 25) = 86(-25 - y)$. (*)

Or, 87 et 86 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $87 \mid -25 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-25 - y = 87k$

et alors, d'après (*): $x - 25 = 86k$.

• Réciproquement, si $x = 25 + 86k$ et $y = -25 - 87k$ alors :

$87x + 86y = 87(25 + 86k) + 86(-25 - 87k) = \ldots$ (à faire) $= 25$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $87x + 86y = 25$ sont les couples $(25 + 86k, -25 - 87k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°6 : résoudre l'équation diophantienne $72x + 2y = 67$.

CORRECTION

• $72 = 2 \times 36$
donc PGCD(72, 2) = 2.

• $67 = 2 \times 33 + 1$ donc 2 ne divise pas 67
donc l'équation diophantienne $72x + 2y = 67$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°7 : résoudre l'équation diophantienne $26x + 48y = 28$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 48 et 26 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 48 | = | 26 | × | 1 | + | 22 |
| (2) | 26 | = | 22 | × | 1 | + | 4 |
| (3) | 22 | = | 4 | × | 5 | + | 2 |
| (4) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(26, 48) = 2.
En divisant par PGCD(26, 48) : $26x + 48y = 28 \Leftrightarrow 13x + 24y = 14$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 13 et 24 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 24 | = | 13 | × | 1 | + | 11 |
| (2) | 13 | = | 11 | × | 1 | + | 2 |
| (3) | 11 | = | 2 | × | 5 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | 2 | × | (-5) |
| (2) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | (13-11×1) | × | (-5) |
| | 1 | = | 13 | × | (-5) | + | 11 | × | 6 |
| (1) | 1 | = | 13 | × | -5 | + | (24-13×1) | × | 6 |
| | 1 | = | 24 | × | 6 | + | 13 | × | (-11) |

On a donc : $13 \times (-11) + 24 \times 6 = 1$
puis en multipliant par 14 : $13 \times (-154) + 24 \times 84 = 14$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $13x + 24y = 14$ :
$13x + 24y = 14$ et $13 \times (-154) + 24 \times 84 = 14$
donc, par soustraction : $13(x + 154) + 24(y - 84) = 0$
donc $13(x + 154) = 24(84 - y)$. (*)
Or, 13 et 24 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $13 \mid 84 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $84 - y = 13k$
et alors, d'après (*): $x + 154 = 24k$.

• Réciproquement, si $x = -154 + 24k$ et $y = 84 - 13k$ alors :
$13x + 24y = 13(-154 + 24k) + 24(84 - 13k) = ...$ (à faire) $= 14$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $26x + 48y = 28$ sont les couples $(-154 + 24k, 84 - 13k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°8 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 91y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 33 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 91 | = | 33 | × | 2 | + | 25 |
| (2) | 33 | = | 25 | × | 1 | + | 8 |
| (3) | 25 | = | 8 | × | 3 | + | 1 |
| (4) | 8 | = | 1 | × | 8 | + | 0 |

donc PGCD(33, 91) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x0, y0)=(2, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 91 et 33) et en multipliant par 66, on aurait trouvé la solution particulière (-726, 264).

• Si x et y sont solutions de l'équation $33x + 91y = 66$ :

$33x + 91y = 66$ et $91 \times 0 = 66$

donc, par soustraction : $33(x - 2) + 91y = 0$

donc $33(x - 2) = -91y$. (*)

Or, 33 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $33 \mid -y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $- y = 33k$

et alors, d'après (*): $x - 2 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 2 + 91k$ et $y = -33k$ alors :

$33x + 91y = 33(2 + 91k) + 91(-33k) = \ldots$ (à faire) $= 66$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 91y = 66$ sont les couples $(2 + 91k, -33k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°9 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 63y = 51$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 63 et 33 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 63 | = | 33 | × | 1 | + | 30 |
| (2) | 33 | = | 30 | × | 1 | + | 3 |
| (3) | 30 | = | 3 | × | 10 | + | 0 |

donc PGCD(33, 63) = 3.
En divisant par PGCD(33, 63) : $33x + 63y = 51 \iff 11x + 21y = 17$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 11 et 21 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 21 | = | 11 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 11 | = | 10 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 10 | = | 1 | × | 10 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | 10 | × | (-1) |
| (1) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | (21-11×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 21 | × | (-1) | + | 11 | × | 2 |

On a donc : $11 \times 2 + 21 \times (-1) = 1$
puis en multipliant par 17 : $11 \times 34 + 21 \times (-17) = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 21y = 17$ :
$11x + 21y = 17$ et $11 \times 34 + 21 \times (-17) = 17$
donc, par soustraction : $11(x - 34) + 21(y + 17) = 0$
donc $11(x - 34) = 21(-17 - y)$. (*)
Or, 11 et 21 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -17 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-17 - y = 11k$
et alors, d'après (*): $x - 34 = 21k$.

• Réciproquement, si $x = 34 + 21k$ et $y = -17 - 11k$ alors :
$11x + 21y = 11(34 + 21k) + 21(-17 - 11k) = \ldots$ (à faire) $= 17$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 63y = 51$ sont les couples $(34 + 21k, -17 - 11k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°10 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 4y = 93$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 15 et 4 :

(1) $15 = 4 \times 3 + 3$

(2) $4 = 3 \times 1 + 1$

(3) $3 = 1 \times 3 + 0$

donc PGCD(15, 4) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 4 \times 1 + 3 \times (-1)$

(1) $1 = 4 \times 1 + (15-4\times3) \times (-1)$

$1 = 15 \times (-1) + 4 \times 4$

On a donc : $15 \times (-1) + 4 \times 4 = 1$

puis en multipliant par 93 : $15 \times (-93) + 4 \times 372 = 93$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $15x + 4y = 93$ :

$15x + 4y = 93$ et $15 \times (-93) + 4 \times 372 = 93$

donc, par soustraction : $15(x + 93) + 4(y - 372) = 0$

donc $15(x + 93) = 4(372 - y)$. (*)

Or, 15 et 4 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $15 \mid 372 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $372 - y = 15k$

et alors, d'après (*): $x + 93 = 4k$.

• Réciproquement, si $x = -93 + 4k$ et $y = 372 - 15k$ alors :

$15x + 4y = 15(-93 + 4k) + 4(372 - 15k) = \ldots$ (à faire) $= 93$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $15x + 4y = 93$ sont les couples $(-93 + 4k,\ 372 - 15k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°11 : résoudre l'équation diophantienne $83x + 19y = 69$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 19 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 83 | = | 19 | × | 4 | + | 7 |
| (2) | 19 | = | 7 | × | 2 | + | 5 |
| (3) | 7 | = | 5 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (5) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(83, 19) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (3) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (7-5×1) | × | (-2) |
| | 1 | = | 7 | × | (-2) | + | 5 | × | 3 |
| (2) | 1 | = | 7 | × | -2 | + | (19-7×2) | × | 3 |
| | 1 | = | 19 | × | 3 | + | 7 | × | (-8) |
| (1) | 1 | = | 19 | × | 3 | + | (83-19×4) | × | (-8) |
| | 1 | = | 83 | × | (-8) | + | 19 | × | 35 |

On a donc : $83 \times (-8) + 19 \times 35 = 1$
puis en multipliant par 69 : $83 \times (-552) + 19 \times 2415 = 69$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $83x + 19y = 69$ :
$83x + 19y = 69$ et $83 \times (-552) + 19 \times 2415 = 69$
donc, par soustraction : $83(x + 552) + 19(y - 2415) = 0$
donc $83(x + 552) = 19(2415 - y)$. (*)
Or, 83 et 19 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $83 \mid 2415 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $2415 - y = 83k$
et alors, d'après (*): $x + 552 = 19k$.

• Réciproquement, si $x = -552 + 19k$ et $y = 2415 - 83k$ alors :
$83x + 19y = 83(-552 + 19k) + 19(2415 - 83k) = \ldots$ (à faire) $= 69$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $83x + 19y = 69$ sont les couples $(-552 + 19k, 2415 - 83k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°12 : résoudre l'équation diophantienne $26x + 88y = 31$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 26 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 88 | = | 26 | × | 3 | + | 10 |
| (2) | 26 | = | 10 | × | 2 | + | 6 |
| (3) | 10 | = | 6 | × | 1 | + | 4 |
| (4) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(26, 88) = 2.

• $31 = 2 \times 15 + 1$ donc 2 ne divise pas 31
donc l'équation diophantienne $26x + 88y = 31$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°13 : résoudre l'équation diophantienne $42x + 37y = 12$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 42 et 37 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 42 | = | 37 | × | 1 | + | 5 |
| (2) | 37 | = | 5 | × | 7 | + | 2 |
| (3) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(42, 37) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (2) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (37-5×7) | × | (-2) |
| | 1 | = | 37 | × | (-2) | + | 5 | × | 15 |
| (1) | 1 | = | 37 | × | -2 | + | (42-37×1) | × | 15 |
| | 1 | = | 42 | × | 15 | + | 37 | × | (-17) |

On a donc : $42 \times 15 + 37 \times (-17) = 1$

puis en multipliant par 12 : $42 \times 180 + 37 \times (-204) = 12$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $42x + 37y = 12$ :

$42x + 37y = 12$ et $42 \times 180 + 37 \times (-204) = 12$

donc, par soustraction : $42(x - 180) + 37(y + 204) = 0$

donc $42(x - 180) = 37(-204 - y)$. (*)

Or, 42 et 37 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $42 \mid -204 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-204 - y = 42k$

et alors, d'après (*): $x - 180 = 37k$.

• Réciproquement, si $x = 180 + 37k$ et $y = -204 - 42k$ alors :

$42x + 37y = 42(180 + 37k) + 37(-204 - 42k) = \dots$ (à faire) $= 12$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $42x + 37y = 12$ sont les couples $(180 + 37k, -204 - 42k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°14 : résoudre l'équation diophantienne $83x + 42y = 65$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 42 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 83 | = | 42 | × | 1 | + | 41 |
| (2) | 42 | = | 41 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 41 | = | 1 | × | 41 | + | 0 |

donc PGCD(83, 42) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 42 | × | 1 | + | 41 | × | (-1) |
| (1) | 1 | = | 42 | × | 1 | + | (83-42×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 83 | × | (-1) | + | 42 | × | 2 |

On a donc : $83 \times (-1) + 42 \times 2 = 1$

puis en multipliant par 65 : $83 \times (-65) + 42 \times 130 = 65$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $83x + 42y = 65$ :

$83x + 42y = 65$ et $83 \times (-65) + 42 \times 130 = 65$

donc, par soustraction : $83(x + 65) + 42(y - 130) = 0$

donc $83(x + 65) = 42(130 - y)$. (*)

Or, 83 et 42 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $83 \mid 130 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $130 - y = 83k$

et alors, d'après (*): $x + 65 = 42k$.

• Réciproquement, si $x = -65 + 42k$ et $y = 130 - 83k$ alors :

$83x + 42y = 83(-65 + 42k) + 42(130 - 83k) = ...$ (à faire) $= 65$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $83x + 42y = 65$ sont les couples $(-65 + 42k, 130 - 83k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°15 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 61y = 62$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 61 et 51 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 61 | = | 51 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 51 | = | 10 | × | 5 | + | 1 |
| (3) | 10 | = | 1 | × | 10 | + | 0 |

donc PGCD(51, 61) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 51 | × | 1 | + | 10 | × | (-5) |
| (1) | 1 | = | 51 | × | 1 | + | (61-51×1) | × | (-5) |
| | 1 | = | 61 | × | (-5) | + | 51 | × | 6 |

On a donc : $51 \times 6 + 61 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 62 : $51 \times 372 + 61 \times (-310) = 62$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $51x + 61y = 62$ :

$51x + 61y = 62$ et $51 \times 372 + 61 \times (-310) = 62$

donc, par soustraction : $51(x - 372) + 61(y + 310) = 0$

donc $51(x - 372) = 61(-310 - y)$. (*)

Or, 51 et 61 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $51 \mid -310 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-310 - y = 51k$

et alors, d'après (*): $x - 372 = 61k$.

• Réciproquement, si $x = 372 + 61k$ et $y = -310 - 51k$ alors :

$51x + 61y = 51(372 + 61k) + 61(-310 - 51k) = \ldots$ (à faire) $= 62$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $51x + 61y = 62$ sont les couples $(372 + 61k, -310 - 51k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°16 : résoudre l'équation diophantienne $60x + 62y = 44$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 62 et 60 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 62 | = | 60 | × | 1 | + | 2 |
| (2) | 60 | = | 2 | × | 30 | + | 0 |

donc PGCD(60, 62) = 2.
En divisant par PGCD(60, 62) : $60x + 62y = 44 \iff 30x + 31y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 30 et 31 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 31 | = | 30 | × | 1 | + | 1 |
| (2) | 30 | = | 1 | × | 30 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 31 \times 1 + 30 \times (-1)$

On a donc : $30 \times (-1) + 31 \times 1 = 1$
puis en multipliant par 22 : $30 \times (-22) + 31 \times 22 = 22$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $30x + 31y = 22$ :
$30x + 31y = 22$ et $30 \times (-22) + 31 \times 22 = 22$
donc, par soustraction : $30(x + 22) + 31(y - 22) = 0$
donc $30(x + 22) = 31(22 - y)$. (*)
Or, 30 et 31 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $30 \mid 22 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $22 - y = 30k$
et alors, d'après (*): $x + 22 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -22 + 31k$ et $y = 22 - 30k$ alors :
$30x + 31y = 30(-22 + 31k) + 31(22 - 30k) = \ldots$ (à faire) $= 22$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $60x + 62y = 44$ sont les couples $(-22 + 31k, 22 - 30k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°17 : résoudre l'équation diophantienne $48x + 80y = 21$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 80 et 48 :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 80 | = | 48 | × | 1 | + | 32 |
| (2) | 48 | = | 32 | × | 1 | + | 16 |
| (3) | 32 | = | 16 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(48, 80) = 16.

• $21 = 16 \times 1 + 5$ donc 16 ne divise pas 21
donc l'équation diophantienne $48x + 80y = 21$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°18 : résoudre l'équation diophantienne $65x + 43y = 53$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 65 et 43 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 65 | = | 43 | × | 1 | + | 22 |
| (2) | 43 | = | 22 | × | 1 | + | 21 |
| (3) | 22 | = | 21 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 21 | = | 1 | × | 21 | + | 0 |

donc PGCD(65, 43) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 22 | × | 1 | + | 21 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 22 | × | 1 | + | (43-22×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 43 | × | (-1) | + | 22 | × | 2 |
| (1) | 1 | = | 43 | × | -1 | + | (65-43×1) | × | 2 |
| | 1 | = | 65 | × | 2 | + | 43 | × | (-3) |

On a donc : $65 \times 2 + 43 \times (-3) = 1$

puis en multipliant par 53 : $65 \times 106 + 43 \times (-159) = 53$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $65x + 43y = 53$ :

$65x + 43y = 53$ et $65 \times 106 + 43 \times (-159) = 53$

donc, par soustraction : $65(x - 106) + 43(y + 159) = 0$

donc $65(x - 106) = 43(-159 - y)$. (*)

Or, 65 et 43 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $65 \mid -159 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-159 - y = 65k$

et alors, d'après (*): $x - 106 = 43k$.

• Réciproquement, si $x = 106 + 43k$ et $y = -159 - 65k$ alors :

$65x + 43y = 65(106 + 43k) + 43(-159 - 65k) = \ldots$ (à faire) $= 53$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $65x + 43y = 53$ sont les couples $(106 + 43k, -159 - 65k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°19 : résoudre l'équation diophantienne $60x + 85y = 20$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 85 et 60 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 85 | = | 60 | × | 1 | + | 25 |
| (2) | 60 | = | 25 | × | 2 | + | 10 |
| (3) | 25 | = | 10 | × | 2 | + | 5 |
| (4) | 10 | = | 5 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(60, 85) = 5.
En divisant par PGCD(60, 85) : $60x + 85y = 20 \iff 12x + 17y = 4$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 12 et 17 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 17 | = | 12 | × | 1 | + | 5 |
| (2) | 12 | = | 5 | × | 2 | + | 2 |
| (3) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (2) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (12-5×2) | × | (-2) |
| | 1 | = | 12 | × | (-2) | + | 5 | × | 5 |
| (1) | 1 | = | 12 | × | -2 | + | (17-12×1) | × | 5 |
| | 1 | = | 17 | × | 5 | + | 12 | × | (-7) |

On a donc : $12 \times (-7) + 17 \times 5 = 1$
puis en multipliant par 4 : $12 \times (-28) + 17 \times 20 = 4$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $12x + 17y = 4$ :
$12x + 17y = 4$ et $12 \times (-28) + 17 \times 20 = 4$
donc, par soustraction : $12(x + 28) + 17(y - 20) = 0$
donc $12(x + 28) = 17(20 - y)$. (*)
Or, 12 et 17 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $12 \mid 20 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $20 - y = 12k$
et alors, d'après (*): $x + 28 = 17k$.

• Réciproquement, si $x = -28 + 17k$ et $y = 20 - 12k$ alors :
$12x + 17y = 12(-28 + 17k) + 17(20 - 12k) = \ldots$ (à faire) $= 4$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $60x + 85y = 20$ sont les couples
$(-28 + 17k, 20 - 12k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°20 : résoudre l'équation diophantienne $90x + 86y = 50$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 86 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 90 | = | 86 | × | 1 | + | 4 |
| (2) | 86 | = | 4 | × | 21 | + | 2 |
| (3) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(90, 86) = 2.
En divisant par PGCD(90, 86) : $90x + 86y = 50 \iff 45x + 43y = 25$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 45 et 43 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 45 | = | 43 | × | 1 | + | 2 |
| (2) | 43 | = | 2 | × | 21 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 43 \times 1 + 2 \times (-21)$
(1) $1 = 43 \times 1 + (45-43\times1) \times (-21)$
$1 = 45 \times (-21) + 43 \times 22$

On a donc : $45 \times (-21) + 43 \times 22 = 1$
puis en multipliant par 25 : $45 \times (-525) + 43 \times 550 = 25$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $45x + 43y = 25$ :
$45x + 43y = 25$ et $45 \times (-525) + 43 \times 550 = 25$
donc, par soustraction : $45(x + 525) + 43(y - 550) = 0$
donc $45(x + 525) = 43(550 - y)$. (*)
Or, 45 et 43 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $45 \mid 550 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $550 - y = 45k$
et alors, d'après (*): $x + 525 = 43k$.

• Réciproquement, si $x = -525 + 43k$ et $y = 550 - 45k$ alors :
$45x + 43y = 45(-525 + 43k) + 43(550 - 45k) = \ldots$ (à faire) $= 25$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $90x + 86y = 50$ sont les couples
$(-525 + 43k, 550 - 45k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°21 : résoudre l'équation diophantienne $7x + 14y = 46$.

CORRECTION

• $14 = 7 \times 2$
donc $PGCD(7, 14) = 7$.

• $46 = 7 \times 6 + 4$ donc 7 ne divise pas 46
donc l'équation diophantienne $7x + 14y = 46$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°22 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 28y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 88 et 28 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 88 | = | 28 | × | 3 | + | 4 |
| (2) | 28 | = | 4 | × | 7 | + | 0 |

donc PGCD(88, 28) = 4.
En divisant par PGCD(88, 28) : $88x + 28y = 16 \iff 22x + 7y = 4$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 22 et 7 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 22 | = | 7 | × | 3 | + | 1 |
| (2) | 7 | = | 1 | × | 7 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 22 \times 1 + 7 \times (-3)$

Puis en multipliant par 4 : $22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $22x + 7y = 4$ :
$22x + 7y = 4$ et $22 \times 4 + 7 \times (-12) = 4$
donc, par soustraction : $22(x - 4) + 7(y + 12) = 0$
donc $22(x - 4) = 7(-12 - y)$. (*)
Or, 22 et 7 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $22 \mid -12 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-12 - y = 22k$
et alors, d'après (*): $x - 4 = 7k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 7k$ et $y = -12 - 22k$ alors :
$22x + 7y = 22(4 + 7k) + 7(-12 - 22k) = ...$ (à faire) $= 4$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $88x + 28y = 16$ sont les couples $(4 + 7k, -12 - 22k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°23 : résoudre l'équation diophantienne $37x + 25y = 64$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 37 et 25 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 37 | = | 25 | × | 1 | + | 12 |
| (2) | 25 | = | 12 | × | 2 | + | 1 |
| (3) | 12 | = | 1 | × | 12 | + | 0 |

donc PGCD(37, 25) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 25 | × | 1 | + | 12 | × | (-2) |
| (1) | 1 | = | 25 | × | 1 | + | (37-25×1) | × | (-2) |
| | 1 | = | 37 | × | (-2) | + | 25 | × | 3 |

On a donc : $37 \times (-2) + 25 \times 3 = 1$

puis en multipliant par 64 : $37 \times (-128) + 25 \times 192 = 64$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $37x + 25y = 64$ :

$37x + 25y = 64$ et $37 \times (-128) + 25 \times 192 = 64$

donc, par soustraction : $37(x + 128) + 25(y - 192) = 0$

donc $37(x + 128) = 25(192 - y)$. (*)

Or, 37 et 25 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $37 \mid 192 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $192 - y = 37k$

et alors, d'après (*): $x + 128 = 25k$.

• Réciproquement, si $x = -128 + 25k$ et $y = 192 - 37k$ alors :

$37x + 25y = 37(-128 + 25k) + 25(192 - 37k) = \ldots$ (à faire) $= 64$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $37x + 25y = 64$ sont les couples $(-128 + 25k, 192 - 37k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°24 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 76y = 46$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 76 et 24 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 76 | = | 24 | × | 3 | + | 4 |
| (2) | 24 | = | 4 | × | 6 | + | 0 |

donc PGCD(24, 76) = 4.

• $46 = 4 \times 11 + 2$ donc 4 ne divise pas 46
donc l'équation diophantienne $24x + 76y = 46$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°25 : résoudre l'équation diophantienne $78x + 69y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 69 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 78 | = | 69 | × | 1 | + | 9 |
| (2) | 69 | = | 9 | × | 7 | + | 6 |
| (3) | 9 | = | 6 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(78, 69) = 3.

• $16 = 3 \times 5 + 1$ donc 3 ne divise pas 16
donc l'équation diophantienne $78x + 69y = 16$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°26 : résoudre l'équation diophantienne 70x + 64y = 38.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 64 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 70 | = | 64 | × | 1 | + | 6 |
| (2) | 64 | = | 6 | × | 10 | + | 4 |
| (3) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(70, 64) = 2.
En divisant par PGCD(70, 64) : 70x + 64y = 38 <=> 35x + 32y = 19.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 35 et 32 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 35 | = | 32 | × | 1 | + | 3 |
| (2) | 32 | = | 3 | × | 10 | + | 2 |
| (3) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (32-3×10) | × | (-1) |
| | 1 | = | 32 | × | (-1) | + | 3 | × | 11 |
| (1) | 1 | = | 32 | × | -1 | + | (35-32×1) | × | 11 |
| | 1 | = | 35 | × | 11 | + | 32 | × | (-12) |

On a donc : 35 × 11 + 32 × (-12) = 1
puis en multipliant par 19 : 35 × 209 + 32 × (-228) = 19.

• Si x et y sont solutions de l'équation 35x + 32y = 19 :
35x + 32y = 19 et 35 × 209 + 32 × (-228) = 19
donc, par soustraction : 35(x - 209) + 32(y + 228) = 0
donc 35(x - 209) = 32(-228 - y). (*)
Or, 35 et 32 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 35 | -228 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -228 - y = 35$k$
et alors, d'après (*): x - 209 = 32$k$.

• Réciproquement, si x = 209 + 32$k$ et y = -228 - 35$k$ alors :
35x + 32y = 35(209 + 32$k$) + 32(-228 - 35$k$) = ... (à faire) = 19.

• Conclusion : les solutions de l'équation 70x + 64y = 38 sont les couples (209 + 32$k$, -228 - 35$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°27 : résoudre l'équation diophantienne $68x + 11y = 65$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 68 et 11 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 68 | = | 11 | × | 6 | + | 2 |
| (2) | 11 | = | 2 | × | 5 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(68, 11) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | 2 | × | (-5) |
| (1) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | (68-11×6) | × | (-5) |
| | 1 | = | 68 | × | (-5) | + | 11 | × | 31 |

On a donc : $68 \times (-5) + 11 \times 31 = 1$

puis en multipliant par 65 : $68 \times (-325) + 11 \times 2015 = 65$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $68x + 11y = 65$ :

$68x + 11y = 65$ et $68 \times (-325) + 11 \times 2015 = 65$

donc, par soustraction : $68(x + 325) + 11(y - 2015) = 0$

donc $68(x + 325) = 11(2015 - y)$. (*)

Or, 68 et 11 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $68 \mid 2015 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $2015 - y = 68k$

et alors, d'après (*): $x + 325 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = -325 + 11k$ et $y = 2015 - 68k$ alors :

$68x + 11y = 68(-325 + 11k) + 11(2015 - 68k) = ...$ (à faire) $= 65$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $68x + 11y = 65$ sont les couples $(-325 + 11k, 2015 - 68k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°28 : résoudre l'équation diophantienne 76x + 39y = 61.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 76 et 39 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 76 | = | 39 | × | 1 | + | 37 |
| (2) | 39 | = | 37 | × | 1 | + | 2 |
| (3) | 37 | = | 2 | × | 18 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(76, 39) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 37 | × | 1 | + | 2 | × | (-18) |
| (2) | 1 | = | 37 | × | 1 | + | (39-37×1) | × | (-18) |
| | 1 | = | 39 | × | (-18) | + | 37 | × | 19 |
| (1) | 1 | = | 39 | × | -18 | + | (76-39×1) | × | 19 |
| | 1 | = | 76 | × | 19 | + | 39 | × | (-37) |

On a donc : 76 × 19 + 39 × (-37) = 1
puis en multipliant par 61 : 76 × 1159 + 39 × (-2257) = 61.

• Si x et y sont solutions de l'équation 76x + 39y = 61 :
76x + 39y = 61 et 76 × 1159 + 39 × (-2257) = 61
donc, par soustraction : 76(x - 1159) + 39(y + 2257) = 0
donc 76(x - 1159) = 39(-2257 - y). (*)
Or, 76 et 39 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 76 | -2257 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -2257 - y = 76$k$
et alors, d'après (*): x - 1159 = 39$k$.

• Réciproquement, si x = 1159 + 39$k$ et y = -2257 - 76$k$ alors :
76x + 39y = 76(1159 + 39$k$) + 39(-2257 - 76$k$) = ... (à faire) = 61.

• Conclusion : les solutions de l'équation 76x + 39y = 61 sont les couples
(1159 + 39$k$, -2257 - 76$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°29 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 42y = 99$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 42 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 93 | = | 42 | × | 2 | + | 9 |
| (2) | 42 | = | 9 | × | 4 | + | 6 |
| (3) | 9 | = | 6 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(93, 42) = 3.
En divisant par PGCD(93, 42) : $93x + 42y = 99 \iff 31x + 14y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 31 et 14 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 31 | = | 14 | × | 2 | + | 3 |
| (2) | 14 | = | 3 | × | 4 | + | 2 |
| (3) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | |
|---|---|
| (3) | $1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$ |
| (2) | $1 = 3 \times 1 + (14-3\times4) \times (-1)$ |
| | $1 = 14 \times (-1) + 3 \times 5$ |
| (1) | $1 = 14 \times -1 + (31-14\times2) \times 5$ |
| | $1 = 31 \times 5 + 14 \times (-11)$ |

On a donc : $31 \times 5 + 14 \times (-11) = 1$
puis en multipliant par 33 : $31 \times 165 + 14 \times (-363) = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 14y = 33$ :
$31x + 14y = 33$ et $31 \times 165 + 14 \times (-363) = 33$
donc, par soustraction : $31(x - 165) + 14(y + 363) = 0$
donc $31(x - 165) = 14(-363 - y)$. (*)
Or, 31 et 14 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid -363 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-363 - y = 31k$
et alors, d'après (*): $x - 165 = 14k$.

• Réciproquement, si $x = 165 + 14k$ et $y = -363 - 31k$ alors :
$31x + 14y = 31(165 + 14k) + 14(-363 - 31k) = \ldots$ (à faire) $= 33$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $93x + 42y = 99$ sont les couples $(165 + 14k, -363 - 31k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°30 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 10y = 32$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 15 et 10 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 15 | = | 10 | × | 1 | + | 5 |
| (2) | 10 | = | 5 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(15, 10) = 5.

• $32 = 5 \times 6 + 2$ donc 5 ne divise pas 32
donc l'équation diophantienne $15x + 10y = 32$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°31 : résoudre l'équation diophantienne $49x + 87y = 77$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 49 :

$$\begin{array}{llcllllll}
(1) & 87 & = & 49 & \times & 1 & + & 38 \\
(2) & 49 & = & 38 & \times & 1 & + & 11 \\
(3) & 38 & = & 11 & \times & 3 & + & 5 \\
(4) & 11 & = & 5 & \times & 2 & + & 1 \\
(5) & 5 & = & 1 & \times & 5 & + & 0
\end{array}$$

donc PGCD(49, 87) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{llcllllll}
(4) & 1 & = & 11 & \times & 1 & + & 5 \times (-2) \\
(3) & 1 & = & 11 & \times & 1 & + & (38-11\times3) \times (-2) \\
 & 1 & = & 38 & \times & (-2) & + & 11 \times 7 \\
(2) & 1 & = & 38 & \times & -2 & + & (49-38\times1) \times 7 \\
 & 1 & = & 49 & \times & 7 & + & 38 \times (-9) \\
(1) & 1 & = & 49 & \times & 7 & + & (87-49\times1) \times (-9) \\
 & 1 & = & 87 & \times & (-9) & + & 49 \times 16
\end{array}$$

On a donc : $49 \times 16 + 87 \times (-9) = 1$

puis en multipliant par 77 : $49 \times 1232 + 87 \times (-693) = 77$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 87y = 77$ :

$49x + 87y = 77$ et $49 \times 1232 + 87 \times (-693) = 77$

donc, par soustraction : $49(x - 1232) + 87(y + 693) = 0$

donc $49(x - 1232) = 87(-693 - y)$. (*)

Or, 49 et 87 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid -693 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-693 - y = 49k$

et alors, d'après (*): $x - 1232 = 87k$.

• Réciproquement, si $x = 1232 + 87k$ et $y = -693 - 49k$ alors :

$49x + 87y = 49(1232 + 87k) + 87(-693 - 49k) = \ldots$ (à faire) $= 77$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $49x + 87y = 77$ sont les couples $(1232 + 87k, -693 - 49k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°32 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 60y = 24$.

CORRECTION

• $60 = 2 \times 30$
donc PGCD(2, 60) = 2.

En divisant par 2 : $2x + 60y = 24 \iff x + 30y = 12$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 60y = 24$ sont évidemment les couples $(-30k + 12, k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°33 : résoudre l'équation diophantienne $18x + 9y = 18$.

CORRECTION

• $18 = 9 \times 2$
donc PGCD(18, 9) = 9.

En divisant par 9 : $18x + 9y = 18 \iff 2x + y = 2$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $18x + 9y = 18$ sont évidemment les couples $(k, -2k + 2)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°34 : résoudre l'équation diophantienne $62x + 32y = 94$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 62 et 32 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 62 | = | 32 | × | 1 | + | 30 |
| (2) | 32 | = | 30 | × | 1 | + | 2 |
| (3) | 30 | = | 2 | × | 15 | + | 0 |

donc PGCD(62, 32) = 2.
En divisant par PGCD(62, 32) : $62x + 32y = 94 \iff 31x + 16y = 47$.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(1, 1)$.
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 31 et 16) et en multipliant par 47, on aurait trouvé la solution particulière (-47, 94).

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 16y = 47$ :
$31x + 16y = 47$ et $31 \times 1 + 16 \times 1 = 47$
donc, par soustraction : $31(x - 1) + 16(y - 1) = 0$
donc $31(x - 1) = 16(1 - y)$. (*)
Or, 31 et 16 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $1 - y = 31k$
et alors, d'après (*): $x - 1 = 16k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 16k$ et $y = 1 - 31k$ alors :
$31x + 16y = 31(1 + 16k) + 16(1 - 31k) = ...$ (à faire) $= 47$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $62x + 32y = 94$ sont les couples $(1 + 16k, 1 - 31k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°35 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 83y = 83$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 83 et 31 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 83 | = | 31 | × | 2 | + | 21 |
| (2) | 31 | = | 21 | × | 1 | + | 10 |
| (3) | 21 | = | 10 | × | 2 | + | 1 |
| (4) | 10 | = | 1 | × | 10 | + | 0 |

donc PGCD(31, 83) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 83 et 31) et en multipliant par 83, on aurait trouvé la solution particulière (-664, 249).

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 83y = 83$ :

$31x + 83y = 83$ et $83 \times 1 = 83$

donc, par soustraction : $31x + 83(y - 1) = 0$

donc $31x = 83(1 - y)$. (*)

Or, 31 et 83 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $1 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x = 83k$.

• Réciproquement, si $x = 83k$ et $y = 1 - 31k$ alors :

$31x + 83y = 31(-83k) + 83(1 - 31k) = \ldots$ (à faire) $= 83$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $31x + 83y = 83$ sont les couples $(83k, 1 - 31k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°36 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 79y = 7$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 79 et 6 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 79 | = | 6 | × | 13 | + | 1 | |
| (2) | 6 | = | 1 | × | 6 | + | 0 | |

donc PGCD(6, 79) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | = | 79 | × | 1 | + | 6 | × | (-13) |

On a donc : $6 \times (-13) + 79 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 7 : $6 \times (-91) + 79 \times 7 = 7$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 79y = 7$ :

$6x + 79y = 7$ et $6 \times (-91) + 79 \times 7 = 7$

donc, par soustraction : $6(x + 91) + 79(y - 7) = 0$

donc $6(x + 91) = 79(7 - y)$. (*)

Or, 6 et 79 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid 7 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $7 - y = 6k$

et alors, d'après (*): $x + 91 = 79k$.

• Réciproquement, si $x = -91 + 79k$ et $y = 7 - 6k$ alors :

$6x + 79y = 6(-91 + 79k) + 79(7 - 6k) = \ldots$ (à faire) $= 7$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $6x + 79y = 7$ sont les couples $(-91 + 79k, 7 - 6k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°37 : résoudre l'équation diophantienne $89x + 3y = 10$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 89 et 3 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 89 | = | 3 | × | 29 | + | 2 |
| (2) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(89, 3) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 3 \times 1 + 2 \times (-1)$

(1) $1 = 3 \times 1 + (89-3\times29) \times (-1)$

$1 = 89 \times (-1) + 3 \times 30$

On a donc : $89 \times (-1) + 3 \times 30 = 1$

puis en multipliant par 10 : $89 \times (-10) + 3 \times 300 = 10$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $89x + 3y = 10$ :

$89x + 3y = 10$ et $89 \times (-10) + 3 \times 300 = 10$

donc, par soustraction : $89(x + 10) + 3(y - 300) = 0$

donc $89(x + 10) = 3(300 - y)$. (*)

Or, 89 et 3 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $89 \mid 300 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $300 - y = 89k$

et alors, d'après (*): $x + 10 = 3k$.

• Réciproquement, si $x = -10 + 3k$ et $y = 300 - 89k$ alors :

$89x + 3y = 89(-10 + 3k) + 3(300 - 89k) = ...$ (à faire) $= 10$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $89x + 3y = 10$ sont les couples $(-10 + 3k, 300 - 89k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°38 : résoudre l'équation diophantienne $57x + 100y = 33$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 57 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 100 | = | 57 | × | 1 | + | 43 |
| (2) | 57 | = | 43 | × | 1 | + | 14 |
| (3) | 43 | = | 14 | × | 3 | + | 1 |
| (4) | 14 | = | 1 | × | 14 | + | 0 |

donc PGCD(57, 100) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 43 | × | 1 | + | 14 | × | (-3) |
| (2) | 1 | = | 43 | × | 1 | + | (57-43×1) | × | (-3) |
| | 1 | = | 57 | × | (-3) | + | 43 | × | 4 |
| (1) | 1 | = | 57 | × | -3 | + | (100-57×1) | × | 4 |
| | 1 | = | 100 | × | 4 | + | 57 | × | (-7) |

On a donc : $57 \times (-7) + 100 \times 4 = 1$

puis en multipliant par 33 : $57 \times (-231) + 100 \times 132 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $57x + 100y = 33$ :

$57x + 100y = 33$ et $57 \times (-231) + 100 \times 132 = 33$

donc, par soustraction : $57(x + 231) + 100(y - 132) = 0$

donc $57(x + 231) = 100(132 - y)$. (*)

Or, 57 et 100 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $57 \mid 132 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $132 - y = 57k$

et alors, d'après (*): $x + 231 = 100k$.

• Réciproquement, si $x = -231 + 100k$ et $y = 132 - 57k$ alors :

$57x + 100y = 57(-231 + 100k) + 100(132 - 57k) = \ldots$ (à faire) $= 33$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $57x + 100y = 33$ sont les couples $(-231 + 100k,\ 132 - 57k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°39 : résoudre l'équation diophantienne $86x + y = 19$.

CORRECTION

• Conclusion : les solutions de l'équation $86x + y = 19$ sont évidemment les couples $(k, -86k + 19)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°40 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 80y = 32$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 82 et 80 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 82 | = | 80 | × | 1 | + | 2 |
| (2) | 80 | = | 2 | × | 40 | + | 0 |

donc PGCD(82, 80) = 2.
En divisant par PGCD(82, 80) : $82x + 80y = 32 \iff 41x + 40y = 16$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 41 et 40 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 41 | = | 40 | × | 1 | + | 1 |
| (2) | 40 | = | 1 | × | 40 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :
(1) $1 = 41 \times 1 + 40 \times (-1)$

Puis en multipliant par 16 : $41 \times 16 + 40 \times (-16) = 16$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 40y = 16$ :
$41x + 40y = 16$ et $41 \times 16 + 40 \times (-16) = 16$
donc, par soustraction : $41(x - 16) + 40(y + 16) = 0$
donc $41(x - 16) = 40(-16 - y)$. (*)
Or, 41 et 40 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid -16 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-16 - y = 41k$
et alors, d'après (*): $x - 16 = 40k$.

• Réciproquement, si $x = 16 + 40k$ et $y = -16 - 41k$ alors :
$41x + 40y = 41(16 + 40k) + 40(-16 - 41k) = \ldots$ (à faire) $= 16$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $82x + 80y = 32$ sont les couples $(16 + 40k, -16 - 41k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°41 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 32y = 39$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 32 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 93 | = | 32 | × | 2 | + | 29 |
| (2) | 32 | = | 29 | × | 1 | + | 3 |
| (3) | 29 | = | 3 | × | 9 | + | 2 |
| (4) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (5) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(93, 32) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (3) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (29-3×9) | × | (-1) |
| | 1 | = | 29 | × | (-1) | + | 3 | × | 10 |
| (2) | 1 | = | 29 | × | -1 | + | (32-29×1) | × | 10 |
| | 1 | = | 32 | × | 10 | + | 29 | × | (-11) |
| (1) | 1 | = | 32 | × | 10 | + | (93-32×2) | × | (-11) |
| | 1 | = | 93 | × | (-11) | + | 32 | × | 32 |

On a donc : $93 \times (-11) + 32 \times 32 = 1$
puis en multipliant par 39 : $93 \times (-429) + 32 \times 1248 = 39$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $93x + 32y = 39$ :
$93x + 32y = 39$ et $93 \times (-429) + 32 \times 1248 = 39$
donc, par soustraction : $93(x + 429) + 32(y - 1248) = 0$
donc $93(x + 429) = 32(1248 - y)$. (*)
Or, 93 et 32 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $93 \mid 1248 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $1248 - y = 93k$
et alors, d'après (*): $x + 429 = 32k$.

• Réciproquement, si $x = -429 + 32k$ et $y = 1248 - 93k$ alors :
$93x + 32y = 93(-429 + 32k) + 32(1248 - 93k) = \dots$ (à faire) $= 39$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $93x + 32y = 39$ sont les couples $(-429 + 32k,\ 1248 - 93k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°42 : résoudre l'équation diophantienne 2x + 84y = 18.

CORRECTION

• 84 = 2 × 42
donc PGCD(2, 84) = 2.

En divisant par 2 : 2x + 84y = 18 <=> x + 42y = 9.

• Conclusion : les solutions de l'équation 2x + 84y = 18 sont évidemment les couples ($-42k + 9$, $k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°43 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 18y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 98 et 18 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 98 | = | 18 | × | 5 | + | 8 |
| (2) | 18 | = | 8 | × | 2 | + | 2 |
| (3) | 8 | = | 2 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(98, 18) = 2.
En divisant par PGCD(98, 18) : $98x + 18y = 66 \iff 49x + 9y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 49 et 9 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 49 | = | 9 | × | 5 | + | 4 |
| (2) | 9 | = | 4 | × | 2 | + | 1 |
| (3) | 4 | = | 1 | × | 4 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 9 | × | 1 | + | 4 | × | (-2) |
| (1) | 1 | = | 9 | × | 1 | + | (49-9×5) | × | (-2) |
| | 1 | = | 49 | × | (-2) | + | 9 | × | 11 |

On a donc : $49 \times (-2) + 9 \times 11 = 1$
puis en multipliant par 33 : $49 \times (-66) + 9 \times 363 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 9y = 33$ :
$49x + 9y = 33$ et $49 \times (-66) + 9 \times 363 = 33$
donc, par soustraction : $49(x + 66) + 9(y - 363) = 0$
donc $49(x + 66) = 9(363 - y)$. (*)
Or, 49 et 9 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid 363 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $363 - y = 49k$
et alors, d'après (*): $x + 66 = 9k$.

• Réciproquement, si $x = -66 + 9k$ et $y = 363 - 49k$ alors :
$49x + 9y = 49(-66 + 9k) + 9(363 - 49k)$ = ... (à faire) = 33.

• Conclusion : les solutions de l'équation $98x + 18y = 66$ sont les couples $(-66 + 9k, 363 - 49k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°44 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 24y = 42$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 51 et 24 :

(1) $51 = 24 \times 2 + 3$

(2) $24 = 3 \times 8 + 0$

donc PGCD(51, 24) = 3.

En divisant par PGCD(51, 24) : $51x + 24y = 42 \iff 17x + 8y = 14$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 17 et 8 :

(1) $17 = 8 \times 2 + 1$

(2) $8 = 1 \times 8 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 17 \times 1 + 8 \times (-2)$

Puis en multipliant par 14 : $17 \times 14 + 8 \times (-28) = 14$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $17x + 8y = 14$ :

$17x + 8y = 14$ et $17 \times 14 + 8 \times (-28) = 14$

donc, par soustraction : $17(x - 14) + 8(y + 28) = 0$

donc $17(x - 14) = 8(-28 - y)$. (*)

Or, 17 et 8 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $17 \mid -28 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-28 - y = 17k$

et alors, d'après (*): $x - 14 = 8k$.

• Réciproquement, si $x = 14 + 8k$ et $y = -28 - 17k$ alors :

$17x + 8y = 17(14 + 8k) + 8(-28 - 17k) = \ldots$ (à faire) $= 14$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $51x + 24y = 42$ sont les couples $(14 + 8k, -28 - 17k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°45 : résoudre l'équation diophantienne 3x + 96y = 24.

CORRECTION

• 96 = 3 × 32
donc PGCD(3, 96) = 3.

En divisant par 3 : 3x + 96y = 24 <=> x + 32y = 8.

• Conclusion : les solutions de l'équation 3x + 96y = 24 sont évidemment les couples (-32$k$ + 8, $k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°46 : résoudre l'équation diophantienne $47x + 20y = 8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 47 et 20 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 47 | = | 20 | × | 2 | + | 7 |
| (2) | 20 | = | 7 | × | 2 | + | 6 |
| (3) | 7 | = | 6 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 6 | = | 1 | × | 6 | + | 0 |

donc PGCD(47, 20) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | 6 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | (20-7×2) | × | (-1) |
| | 1 | = | 20 | × | (-1) | + | 7 | × | 3 |
| (1) | 1 | = | 20 | × | -1 | + | (47-20×2) | × | 3 |
| | 1 | = | 47 | × | 3 | + | 20 | × | (-7) |

On a donc : $47 \times 3 + 20 \times (-7) = 1$

puis en multipliant par 8 : $47 \times 24 + 20 \times (-56) = 8$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $47x + 20y = 8$ :

$47x + 20y = 8$ et $47 \times 24 + 20 \times (-56) = 8$

donc, par soustraction : $47(x - 24) + 20(y + 56) = 0$

donc $47(x - 24) = 20(-56 - y)$. (*)

Or, 47 et 20 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $47 \mid -56 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-56 - y = 47k$

et alors, d'après (*): $x - 24 = 20k$.

• Réciproquement, si $x = 24 + 20k$ et $y = -56 - 47k$ alors :

$47x + 20y = 47(24 + 20k) + 20(-56 - 47k) = \ldots$ (à faire) $= 8$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $47x + 20y = 8$ sont les couples $(24 + 20k, -56 - 47k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°47 : résoudre l'équation diophantienne $11x + 4y = 9$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 11 et 4 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 11 | = | 4 | × | 2 | + | 3 |
| (2) | 4 | = | 3 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(11, 4) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 4 | × | 1 | + | 3 | × | (-1) |
| (1) | 1 | = | 4 | × | 1 | + | (11-4×2) | × | (-1) |
| | 1 | = | 11 | × | (-1) | + | 4 | × | 3 |

On a donc : $11 \times (-1) + 4 \times 3 = 1$

puis en multipliant par 9 : $11 \times (-9) + 4 \times 27 = 9$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 4y = 9$ :

$11x + 4y = 9$ et $11 \times (-9) + 4 \times 27 = 9$

donc, par soustraction : $11(x + 9) + 4(y - 27) = 0$

donc $11(x + 9) = 4(27 - y)$. (*)

Or, 11 et 4 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid 27 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $27 - y = 11k$

et alors, d'après (*): $x + 9 = 4k$.

• Réciproquement, si $x = -9 + 4k$ et $y = 27 - 11k$ alors :

$11x + 4y = 11(-9 + 4k) + 4(27 - 11k) = \ldots$ (à faire) $= 9$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $11x + 4y = 9$ sont les couples $(-9 + 4k, 27 - 11k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°48 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 91y = 16$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 22 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 91 | = | 22 | × | 4 | + | 3 |
| (2) | 22 | = | 3 | × | 7 | + | 1 |
| (3) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(22, 91) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 22 | × | 1 | + | 3 | × | (-7) |
| (1) | 1 | = | 22 | × | 1 | + | (91-22×4) | × | (-7) |
| | 1 | = | 91 | × | (-7) | + | 22 | × | 29 |

On a donc : $22 \times 29 + 91 \times (-7) = 1$

puis en multipliant par 16 : $22 \times 464 + 91 \times (-112) = 16$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $22x + 91y = 16$ :

$22x + 91y = 16$ et $22 \times 464 + 91 \times (-112) = 16$

donc, par soustraction : $22(x - 464) + 91(y + 112) = 0$

donc $22(x - 464) = 91(-112 - y)$. (*)

Or, 22 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $22 \mid -112 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-112 - y = 22k$

et alors, d'après (*): $x - 464 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 464 + 91k$ et $y = -112 - 22k$ alors :

$22x + 91y = 22(464 + 91k) + 91(-112 - 22k) = \dots$ (à faire) $= 16$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $22x + 91y = 16$ sont les couples $(464 + 91k, -112 - 22k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°49 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 90y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 74 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 90 | = | 74 | × | 1 | + | 16 |
| (2) | 74 | = | 16 | × | 4 | + | 10 |
| (3) | 16 | = | 10 | × | 1 | + | 6 |
| (4) | 10 | = | 6 | × | 1 | + | 4 |
| (5) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (6) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(74, 90) = 2.
En divisant par PGCD(74, 90) : $74x + 90y = 66 \iff 37x + 45y = 33$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 37 et 45 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 45 | = | 37 | × | 1 | + | 8 |
| (2) | 37 | = | 8 | × | 4 | + | 5 |
| (3) | 8 | = | 5 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 5 | = | 3 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (6) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (4) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (5-3×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 5 | × | (-1) | + | 3 | × | 2 |
| (3) | 1 | = | 5 | × | -1 | + | (8-5×1) | × | 2 |
| | 1 | = | 8 | × | 2 | + | 5 | × | (-3) |
| (2) | 1 | = | 8 | × | 2 | + | (37-8×4) | × | (-3) |
| | 1 | = | 37 | × | (-3) | + | 8 | × | 14 |
| (1) | 1 | = | 37 | × | -3 | + | (45-37×1) | × | 14 |
| | 1 | = | 45 | × | 14 | + | 37 | × | (-17) |

On a donc : $37 \times (-17) + 45 \times 14 = 1$
puis en multipliant par 33 : $37 \times (-561) + 45 \times 462 = 33$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $37x + 45y = 33$ :
$37x + 45y = 33$ et $37 \times (-561) + 45 \times 462 = 33$
donc, par soustraction : $37(x + 561) + 45(y - 462) = 0$
donc $37(x + 561) = 45(462 - y)$. (*)
Or, 37 et 45 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $37 \mid 462 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $462 - y = 37k$
et alors, d'après (*): $x + 561 = 45k$.

• Réciproquement, si $x = -561 + 45k$ et $y = 462 - 37k$ alors :
$37x + 45y = 37(-561 + 45k) + 45(462 - 37k) = \ldots$ (à faire) $= 33$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $74x + 90y = 66$ sont les couples $(-561 + 45k,\ 462 - 37k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°50 : résoudre l'équation diophantienne $14x + 63y = 63$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 63 et 14 :

(1) $63 = 14 \times 4 + 7$

(2) $14 = 7 \times 2 + 0$

donc PGCD(14, 63) = 7.

En divisant par PGCD(14, 63) : $14x + 63y = 63 \iff 2x + 9y = 9$.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 9 et 2) et en multipliant par 9, on aurait trouvé la solution particulière $(-36, 9)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $2x + 9y = 9$ :

$2x + 9y = 9$ et $9 \times 1 = 9$

donc, par soustraction : $2x + 9(y - 1) = 0$

donc $2x = 9(1 - y)$. (*)

Or, 2 et 9 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $2 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $1 - y = 2k$

et alors, d'après (*): $x = 9k$.

• Réciproquement, si $x = 9k$ et $y = 1 - 2k$ alors :

$2x + 9y = 2(-9k) + 9(1 - 2k) = \ldots$ (à faire) $= 9$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $14x + 63y = 63$ sont les couples $(9k, 1 - 2k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°51 : résoudre l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 87 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 93 | = | 87 | × | 1 | + | 6 |
| (2) | 87 | = | 6 | × | 14 | + | 3 |
| (3) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(93, 87) = 3.

• $41 = 3 \times 13 + 2$ donc 3 ne divise pas 41
donc l'équation diophantienne $93x + 87y = 41$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°52 : résoudre l'équation diophantienne $12x + 67y = 77$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 67 et 12 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 67 | = | 12 | × | 5 | + | 7 |
| (2) | 12 | = | 7 | × | 1 | + | 5 |
| (3) | 7 | = | 5 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (5) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(12, 67) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (3) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (7-5×1) | × | (-2) |
| | 1 | = | 7 | × | (-2) | + | 5 | × | 3 |
| (2) | 1 | = | 7 | × | -2 | + | (12-7×1) | × | 3 |
| | 1 | = | 12 | × | 3 | + | 7 | × | (-5) |
| (1) | 1 | = | 12 | × | 3 | + | (67-12×5) | × | (-5) |
| | 1 | = | 67 | × | (-5) | + | 12 | × | 28 |

On a donc : $12 \times 28 + 67 \times (-5) = 1$

puis en multipliant par 77 : $12 \times 2156 + 67 \times (-385) = 77$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $12x + 67y = 77$ :

$12x + 67y = 77$ et $12 \times 2156 + 67 \times (-385) = 77$

donc, par soustraction : $12(x - 2156) + 67(y + 385) = 0$

donc $12(x - 2156) = 67(-385 - y)$. (*)

Or, 12 et 67 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $12 \mid -385 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-385 - y = 12k$

et alors, d'après (*): $x - 2156 = 67k$.

• Réciproquement, si $x = 2156 + 67k$ et $y = -385 - 12k$ alors :

$12x + 67y = 12(2156 + 67k) + 67(-385 - 12k) = \ldots$ (à faire) $= 77$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $12x + 67y = 77$ sont les couples $(2156 + 67k, -385 - 12k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°53 : résoudre l'équation diophantienne $88x + 91y = 89$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 88 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 91 | = | 88 | × | 1 | + | 3 |
| (2) | 88 | = | 3 | × | 29 | + | 1 |
| (3) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(88, 91) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$(2) \quad 1 = 88 \times 1 + 3 \times (-29)$$
$$(1) \quad 1 = 88 \times 1 + (91-88\times1) \times (-29)$$
$$1 = 91 \times (-29) + 88 \times 30$$

On a donc : $88 \times 30 + 91 \times (-29) = 1$

puis en multipliant par 89 : $88 \times 2670 + 91 \times (-2581) = 89$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $88x + 91y = 89$ :

$88x + 91y = 89$ et $88 \times 2670 + 91 \times (-2581) = 89$

donc, par soustraction : $88(x - 2670) + 91(y + 2581) = 0$

donc $88(x - 2670) = 91(-2581 - y)$. (*)

Or, 88 et 91 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $88 \mid -2581 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-2581 - y = 88k$

et alors, d'après (*): $x - 2670 = 91k$.

• Réciproquement, si $x = 2670 + 91k$ et $y = -2581 - 88k$ alors :

$88x + 91y = 88(2670 + 91k) + 91(-2581 - 88k) = \ldots$ (à faire) $= 89$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $88x + 91y = 89$ sont les couples $(2670 + 91k, -2581 - 88k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°54 : résoudre l'équation diophantienne $67x + 50y = 67$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 67 et 50 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 67 | = | 50 | × | 1 | + | 17 |
| (2) | 50 | = | 17 | × | 2 | + | 16 |
| (3) | 17 | = | 16 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 16 | = | 1 | × | 16 | + | 0 |

donc PGCD(67, 50) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x0, y0)=(1, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 67 et 50) et en multipliant par 67, on aurait trouvé la solution particulière (201, -268).

• Si x et y sont solutions de l'équation $67x + 50y = 67$ :

$67x + 50y = 67$ et $50 \times 0 = 67$

donc, par soustraction : $67(x - 1) + 50y = 0$

donc $67(x - 1) = -50y$. (*)

Or, 67 et 50 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $67 \mid -y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $- y = 67k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 50k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 50k$ et $y = -67k$ alors :

$67x + 50y = 67(1 + 50k) + 50(-67k) = \ldots$ (à faire) $= 67$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $67x + 50y = 67$ sont les couples $(1 + 50k, -67k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°55 : résoudre l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 95 et 80 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 95 | = | 80 | × | 1 | + | 15 |
| (2) | 80 | = | 15 | × | 5 | + | 5 |
| (3) | 15 | = | 5 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(80, 95) = 5.

• $61 = 5 \times 12 + 1$ donc 5 ne divise pas 61
donc l'équation diophantienne $80x + 95y = 61$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°56 : résoudre l'équation diophantienne 100x + 18y = 64.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 100 et 18 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 100 | = | 18 | × | 5 | + | 10 |
| (2) | 18 | = | 10 | × | 1 | + | 8 |
| (3) | 10 | = | 8 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 8 | = | 2 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(100, 18) = 2.
En divisant par PGCD(100, 18) : 100x + 18y = 64 <=> 50x + 9y = 32.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (x0, y0)=(1, -2).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 50 et 9) et en multipliant par 32, on aurait trouvé la solution particulière (64, -352).

• Si x et y sont solutions de l'équation 50x + 9y = 32 :
50x + 9y = 32 et 50 × 1 + 9 × (-2) = 32
donc, par soustraction : 50(x - 1) + 9(y + 2) = 0
donc 50(x - 1) = 9(-2 - y). (*)
Or, 50 et 9 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 50 | -2 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -2 - y = 50$k$
et alors, d'après (*): x - 1 = 9$k$.

• Réciproquement, si x = 1 + 9$k$ et y = -2 - 50$k$ alors :
50x + 9y = 50(1 + 9$k$) + 9(-2 - 50$k$) = ... (à faire) = 32.

• Conclusion : les solutions de l'équation 100x + 18y = 64 sont les couples (1 + 9$k$, -2 - 50$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°57 : résoudre l'équation diophantienne 90x + 51y = 2.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 90 et 51 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 90 | = | 51 | × | 1 | + | 39 |
| (2) | 51 | = | 39 | × | 1 | + | 12 |
| (3) | 39 | = | 12 | × | 3 | + | 3 |
| (4) | 12 | = | 3 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(90, 51) = 3.

• 3 ne divise pas 2
donc l'équation diophantienne 90x + 51y = 2 n'admet pas de solutions.

Exercice n°58 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 74y = 11$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 69 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 74 | = | 69 | × | 1 | + | 5 |
| (2) | 69 | = | 5 | × | 13 | + | 4 |
| (3) | 5 | = | 4 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 4 | = | 1 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(69, 74) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 4 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (69-5×13) | × | (-1) |
| | 1 | = | 69 | × | (-1) | + | 5 | × | 14 |
| (1) | 1 | = | 69 | × | -1 | + | (74-69×1) | × | 14 |
| | 1 | = | 74 | × | 14 | + | 69 | × | (-15) |

On a donc : $69 \times (-15) + 74 \times 14 = 1$

puis en multipliant par 11 : $69 \times (-165) + 74 \times 154 = 11$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $69x + 74y = 11$ :

$69x + 74y = 11$ et $69 \times (-165) + 74 \times 154 = 11$

donc, par soustraction : $69(x + 165) + 74(y - 154) = 0$

donc $69(x + 165) = 74(154 - y)$. (*)

Or, 69 et 74 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $69 \mid 154 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $154 - y = 69k$

et alors, d'après (*): $x + 165 = 74k$.

• Réciproquement, si $x = -165 + 74k$ et $y = 154 - 69k$ alors :

$69x + 74y = 69(-165 + 74k) + 74(154 - 69k) = \ldots$ (à faire) $= 11$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 74y = 11$ sont les couples $(-165 + 74k, 154 - 69k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°59 : résoudre l'équation diophantienne $98x + 62y = 96$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 98 et 62 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 98 | = | 62 | × | 1 | + | 36 |
| (2) | 62 | = | 36 | × | 1 | + | 26 |
| (3) | 36 | = | 26 | × | 1 | + | 10 |
| (4) | 26 | = | 10 | × | 2 | + | 6 |
| (5) | 10 | = | 6 | × | 1 | + | 4 |
| (6) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (7) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(98, 62) = 2.
En divisant par PGCD(98, 62) : $98x + 62y = 96 \iff 49x + 31y = 48$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 49 et 31 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 49 | = | 31 | × | 1 | + | 18 |
| (2) | 31 | = | 18 | × | 1 | + | 13 |
| (3) | 18 | = | 13 | × | 1 | + | 5 |
| (4) | 13 | = | 5 | × | 2 | + | 3 |
| (5) | 5 | = | 3 | × | 1 | + | 2 |
| (6) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (7) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (6) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (5) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (5-3×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 5 | × | (-1) | + | 3 | × | 2 |
| (4) | 1 | = | 5 | × | -1 | + | (13-5×2) | × | 2 |
| | 1 | = | 13 | × | 2 | + | 5 | × | (-5) |
| (3) | 1 | = | 13 | × | 2 | + | (18-13×1) | × | (-5) |
| | 1 | = | 18 | × | (-5) | + | 13 | × | 7 |
| (2) | 1 | = | 18 | × | -5 | + | (31-18×1) | × | 7 |
| | 1 | = | 31 | × | 7 | + | 18 | × | (-12) |
| (1) | 1 | = | 31 | × | 7 | + | (49-31×1) | × | (-12) |
| | 1 | = | 49 | × | (-12) | + | 31 | × | 19 |

On a donc : $49 \times (-12) + 31 \times 19 = 1$
puis en multipliant par 48 : $49 \times (-576) + 31 \times 912 = 48$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $49x + 31y = 48$ :
$49x + 31y = 48$ et $49 \times (-576) + 31 \times 912 = 48$
donc, par soustraction : $49(x + 576) + 31(y - 912) = 0$
donc $49(x + 576) = 31(912 - y)$. (*)
Or, 49 et 31 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $49 \mid 912 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $912 - y = 49k$
et alors, d'après (*): $x + 576 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -576 + 31k$ et $y = 912 - 49k$ alors :
$49x + 31y = 49(-576 + 31k) + 31(912 - 49k) = \ldots$ (à faire) $= 48$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $98x + 62y = 96$ sont les couples $(-576 + 31k, 912 - 49k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°60 : résoudre l'équation diophantienne $50x + 78y = 26$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 50 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 78 | = | 50 | × | 1 | + | 28 |
| (2) | 50 | = | 28 | × | 1 | + | 22 |
| (3) | 28 | = | 22 | × | 1 | + | 6 |
| (4) | 22 | = | 6 | × | 3 | + | 4 |
| (5) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (6) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(50, 78) = 2.
En divisant par PGCD(50, 78) : $50x + 78y = 26 \iff 25x + 39y = 13$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 25 et 39 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 39 | = | 25 | × | 1 | + | 14 |
| (2) | 25 | = | 14 | × | 1 | + | 11 |
| (3) | 14 | = | 11 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 11 | = | 3 | × | 3 | + | 2 |
| (5) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (6) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (4) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (11-3×3) | × | (-1) |
| | 1 | = | 11 | × | (-1) | + | 3 | × | 4 |
| (3) | 1 | = | 11 | × | -1 | + | (14-11×1) | × | 4 |
| | 1 | = | 14 | × | 4 | + | 11 | × | (-5) |
| (2) | 1 | = | 14 | × | 4 | + | (25-14×1) | × | (-5) |
| | 1 | = | 25 | × | (-5) | + | 14 | × | 9 |
| (1) | 1 | = | 25 | × | -5 | + | (39-25×1) | × | 9 |
| | 1 | = | 39 | × | 9 | + | 25 | × | (-14) |

On a donc : $25 \times (-14) + 39 \times 9 = 1$
puis en multipliant par 13 : $25 \times (-182) + 39 \times 117 = 13$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $25x + 39y = 13$ :
$25x + 39y = 13$ et $25 \times (-182) + 39 \times 117 = 13$
donc, par soustraction : $25(x + 182) + 39(y - 117) = 0$
donc $25(x + 182) = 39(117 - y)$. (*)
Or, 25 et 39 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $25 \mid 117 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $117 - y = 25k$
et alors, d'après (*): $x + 182 = 39k$.

• Réciproquement, si $x = -182 + 39k$ et $y = 117 - 25k$ alors :
$25x + 39y = 25(-182 + 39k) + 39(117 - 25k) = \dots$ (à faire) $= 13$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $50x + 78y = 26$ sont les couples $(-182 + 39k,\ 117 - 25k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°61 : résoudre l'équation diophantienne 74x + 10y = 66.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 10 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 74 | = | 10 | × | 7 | + | 4 |
| (2) | 10 | = | 4 | × | 2 | + | 2 |
| (3) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(74, 10) = 2.
En divisant par PGCD(74, 10) : 74x + 10y = 66 <=> 37x + 5y = 33.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 37 et 5 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 37 | = | 5 | × | 7 | + | 2 |
| (2) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (1) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (37-5×7) | × | (-2) |
| | 1 | = | 37 | × | (-2) | + | 5 | × | 15 |

On a donc : 37 × (-2) + 5 × 15 = 1
puis en multipliant par 33 : 37 × (-66) + 5 × 495 = 33.

• Si x et y sont solutions de l'équation 37x + 5y = 33 :
37x + 5y = 33 et 37 × (-66) + 5 × 495 = 33
donc, par soustraction : 37(x + 66) + 5(y - 495) = 0
donc 37(x + 66) = 5(495 - y). (*)
Or, 37 et 5 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 37 | 495 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que 495 - y = 37$k$
et alors, d'après (*): x + 66 = 5$k$.

• Réciproquement, si x = -66 + 5$k$ et y = 495 - 37$k$ alors :
37x + 5y = 37(-66 + 5$k$) + 5(495 - 37$k$) = ... (à faire) = 33.

• Conclusion : les solutions de l'équation 74x + 10y = 66 sont les couples (-66 + 5$k$, 495 - 37$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°62 : résoudre l'équation diophantienne $81x + 46y = 23$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 81 et 46 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 81 | = | 46 | × | 1 | + | 35 |
| (2) | 46 | = | 35 | × | 1 | + | 11 |
| (3) | 35 | = | 11 | × | 3 | + | 2 |
| (4) | 11 | = | 2 | × | 5 | + | 1 |
| (5) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(81, 46) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | 2 | × | (-5) |
| (3) | 1 | = | 11 | × | 1 | + | (35-11×3) | × | (-5) |
| | 1 | = | 35 | × | (-5) | + | 11 | × | 16 |
| (2) | 1 | = | 35 | × | -5 | + | (46-35×1) | × | 16 |
| | 1 | = | 46 | × | 16 | + | 35 | × | (-21) |
| (1) | 1 | = | 46 | × | 16 | + | (81-46×1) | × | (-21) |
| | 1 | = | 81 | × | (-21) | + | 46 | × | 37 |

On a donc : $81 \times (-21) + 46 \times 37 = 1$
puis en multipliant par 23 : $81 \times (-483) + 46 \times 851 = 23$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $81x + 46y = 23$ :
$81x + 46y = 23$ et $81 \times (-483) + 46 \times 851 = 23$
donc, par soustraction : $81(x + 483) + 46(y - 851) = 0$
donc $81(x + 483) = 46(851 - y)$. (*)
Or, 81 et 46 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $81 \mid 851 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $851 - y = 81k$
et alors, d'après (*): $x + 483 = 46k$.

• Réciproquement, si $x = -483 + 46k$ et $y = 851 - 81k$ alors :
$81x + 46y = 81(-483 + 46k) + 46(851 - 81k) = \ldots$ (à faire) $= 23$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $81x + 46y = 23$ sont les couples
$(-483 + 46k, 851 - 81k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°63 : résoudre l'équation diophantienne 72x + 57y = 60.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 72 et 57 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 72 | = | 57 | × | 1 | + | 15 |
| (2) | 57 | = | 15 | × | 3 | + | 12 |
| (3) | 15 | = | 12 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 12 | = | 3 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(72, 57) = 3.
En divisant par PGCD(72, 57) : 72x + 57y = 60 <=> 24x + 19y = 20.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (x0, y0)=(4, -4).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 24 et 19) et en multipliant par 20, on aurait trouvé la solution particulière (80, -100).

• Si x et y sont solutions de l'équation 24x + 19y = 20 :
24x + 19y = 20 et 24 × 4 + 19 × (-4) = 20
donc, par soustraction : 24(x - 4) + 19(y + 4) = 0
donc 24(x - 4) = 19(-4 - y). (*)
Or, 24 et 19 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 24 | -4 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -4 - y = 24$k$
et alors, d'après (*): x - 4 = 19$k$.

• Réciproquement, si x = 4 + 19$k$ et y = -4 - 24$k$ alors :
24x + 19y = 24(4 + 19$k$) + 19(-4 - 24$k$) = ... (à faire) = 20.

• Conclusion : les solutions de l'équation 72x + 57y = 60 sont les couples (4 + 19$k$, -4 - 24$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°64 : résoudre l'équation diophantienne $74x + 17y = 74$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 74 et 17 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 74 | = | 17 | × | 4 | + | 6 |
| (2) | 17 | = | 6 | × | 2 | + | 5 |
| (3) | 6 | = | 5 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 5 | = | 1 | × | 5 | + | 0 |

donc PGCD(74, 17) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(1, 0)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 74 et 17) et en multipliant par 74, on aurait trouvé la solution particulière (222, -962).

• Si x et y sont solutions de l'équation $74x + 17y = 74$ :

$74x + 17y = 74$ et $17 \times 0 = 74$

donc, par soustraction : $74(x - 1) + 17y = 0$

donc $74(x - 1) = -17y$. (*)

Or, 74 et 17 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $74 \mid -y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $- y = 74k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 17k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 17k$ et $y = -74k$ alors :

$74x + 17y = 74(1 + 17k) + 17(-74k) = \ldots$ (à faire) $= 74$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $74x + 17y = 74$ sont les couples $(1 + 17k, -74k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°65 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 54y = 6$.

CORRECTION

• $54 = 2 \times 27$
donc PGCD(2, 54) = 2.

En divisant par 2 : $2x + 54y = 6 \iff x + 27y = 3$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 54y = 6$ sont évidemment les couples $(-27k + 3, k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°66 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 63y = 84$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 69 et 63 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 69 | = | 63 | × | 1 | + | 6 |
| (2) | 63 | = | 6 | × | 10 | + | 3 |
| (3) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(69, 63) = 3.
En divisant par PGCD(69, 63) : $69x + 63y = 84 \iff 23x + 21y = 28$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 23 et 21 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 23 | = | 21 | × | 1 | + | 2 |
| (2) | 21 | = | 2 | × | 10 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 21 \times 1 + 2 \times (-10)$
(1) $1 = 21 \times 1 + (23-21\times1) \times (-10)$
$1 = 23 \times (-10) + 21 \times 11$

On a donc : $23 \times (-10) + 21 \times 11 = 1$
puis en multipliant par 28 : $23 \times (-280) + 21 \times 308 = 28$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $23x + 21y = 28$ :
$23x + 21y = 28$ et $23 \times (-280) + 21 \times 308 = 28$
donc, par soustraction : $23(x + 280) + 21(y - 308) = 0$
donc $23(x + 280) = 21(308 - y)$. (*)
Or, 23 et 21 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $23 \mid 308 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $308 - y = 23k$
et alors, d'après (*): $x + 280 = 21k$.

• Réciproquement, si $x = -280 + 21k$ et $y = 308 - 23k$ alors :
$23x + 21y = 23(-280 + 21k) + 21(308 - 23k) = \ldots$ (à faire) $= 28$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 63y = 84$ sont les couples
$(-280 + 21k, 308 - 23k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°67 : résoudre l'équation diophantienne $91x + 48y = 23$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 91 et 48 :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 91 | = | 48 | × | 1 | + | 43 |
| (2) | 48 | = | 43 | × | 1 | + | 5 |
| (3) | 43 | = | 5 | × | 8 | + | 3 |
| (4) | 5 | = | 3 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (6) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(91, 48) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (4) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (5-3×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 5 | × | (-1) | + | 3 | × | 2 |
| (3) | 1 | = | 5 | × | -1 | + | (43-5×8) | × | 2 |
| | 1 | = | 43 | × | 2 | + | 5 | × | (-17) |
| (2) | 1 | = | 43 | × | 2 | + | (48-43×1) | × | (-17) |
| | 1 | = | 48 | × | (-17) | + | 43 | × | 19 |
| (1) | 1 | = | 48 | × | -17 | + | (91-48×1) | × | 19 |
| | 1 | = | 91 | × | 19 | + | 48 | × | (-36) |

On a donc : $91 \times 19 + 48 \times (-36) = 1$

puis en multipliant par 23 : $91 \times 437 + 48 \times (-828) = 23$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $91x + 48y = 23$ :

$91x + 48y = 23$ et $91 \times 437 + 48 \times (-828) = 23$

donc, par soustraction : $91(x - 437) + 48(y + 828) = 0$

donc $91(x - 437) = 48(-828 - y)$. (*)

Or, 91 et 48 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $91 \mid -828 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-828 - y = 91k$

et alors, d'après (*): $x - 437 = 48k$.

• Réciproquement, si $x = 437 + 48k$ et $y = -828 - 91k$ alors :

$91x + 48y = 91(437 + 48k) + 48(-828 - 91k) = \ldots$ (à faire) $= 23$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $91x + 48y = 23$ sont les couples $(437 + 48k, -828 - 91k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°68 : résoudre l'équation diophantienne 70x + 22y = 48.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 22 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 70 | = | 22 | × | 3 | + | 4 |
| (2) | 22 | = | 4 | × | 5 | + | 2 |
| (3) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(70, 22) = 2.
En divisant par PGCD(70, 22) : 70x + 22y = 48 <=> 35x + 11y = 24.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est (x0, y0)=(1, -1).
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 35 et 11) et en multipliant par 24, on aurait trouvé la solution particulière (-120, 384).

• Si x et y sont solutions de l'équation 35x + 11y = 24 :
35x + 11y = 24 et 35 × 1 + 11 × (-1) = 24
donc, par soustraction : 35(x - 1) + 11(y + 1) = 0
donc 35(x - 1) = 11(-1 - y). (*)
Or, 35 et 11 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 35 | -1 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -1 - y = 35$k$
et alors, d'après (*): x - 1 = 11$k$.

• Réciproquement, si x = 1 + 11$k$ et y = -1 - 35$k$ alors :
35x + 11y = 35(1 + 11$k$) + 11(-1 - 35$k$) = ... (à faire) = 24.

• Conclusion : les solutions de l'équation 70x + 22y = 48 sont les couples (1 + 11$k$, -1 - 35$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°69 : résoudre l'équation diophantienne 79x + 89y = 26.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 89 et 79 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 89 | = | 79 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 79 | = | 10 | × | 7 | + | 9 |
| (3) | 10 | = | 9 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 9 | = | 1 | × | 9 | + | 0 |

donc PGCD(79, 89) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 10 | × | 1 | + | 9 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 10 | × | 1 | + | (79-10×7) | × | (-1) |
| | 1 | = | 79 | × | (-1) | + | 10 | × | 8 |
| (1) | 1 | = | 79 | × | -1 | + | (89-79×1) | × | 8 |
| | 1 | = | 89 | × | 8 | + | 79 | × | (-9) |

On a donc : 79 × (-9) + 89 × 8 = 1

puis en multipliant par 26 : 79 × (-234) + 89 × 208 = 26.

• Si x et y sont solutions de l'équation 79x + 89y = 26 :

79x + 89y = 26 et 79 × (-234) + 89 × 208 = 26

donc, par soustraction : 79(x + 234) + 89(y - 208) = 0

donc 79(x + 234) = 89(208 - y). (*)

Or, 79 et 89 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : 79 | 208 - y

donc il existe un entier relatif $k$ tel que 208 - y = 79$k$

et alors, d'après (*): x + 234 = 89$k$.

• Réciproquement, si x = -234 + 89$k$ et y = 208 - 79$k$ alors :

79x + 89y = 79(-234 + 89$k$) + 89(208 - 79$k$) = ... (à faire) = 26.

• Conclusion : les solutions de l'équation 79x + 89y = 26 sont les couples (-234 + 89$k$, 208 - 79$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°70 : résoudre l'équation diophantienne $45x + 26y = 34$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 45 et 26 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 45 | = | 26 | × | 1 | + | 19 |
| (2) | 26 | = | 19 | × | 1 | + | 7 |
| (3) | 19 | = | 7 | × | 2 | + | 5 |
| (4) | 7 | = | 5 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 5 | = | 2 | × | 2 | + | 1 |
| (6) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(45, 26) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | 2 | × | (-2) |
| (4) | 1 | = | 5 | × | 1 | + | (7-5×1) | × | (-2) |
| | 1 | = | 7 | × | (-2) | + | 5 | × | 3 |
| (3) | 1 | = | 7 | × | -2 | + | (19-7×2) | × | 3 |
| | 1 | = | 19 | × | 3 | + | 7 | × | (-8) |
| (2) | 1 | = | 19 | × | 3 | + | (26-19×1) | × | (-8) |
| | 1 | = | 26 | × | (-8) | + | 19 | × | 11 |
| (1) | 1 | = | 26 | × | -8 | + | (45-26×1) | × | 11 |
| | 1 | = | 45 | × | 11 | + | 26 | × | (-19) |

On a donc : $45 \times 11 + 26 \times (-19) = 1$

puis en multipliant par 34 : $45 \times 374 + 26 \times (-646) = 34$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $45x + 26y = 34$ :

$45x + 26y = 34$ et $45 \times 374 + 26 \times (-646) = 34$

donc, par soustraction : $45(x - 374) + 26(y + 646) = 0$

donc $45(x - 374) = 26(-646 - y)$. (*)

Or, 45 et 26 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $45 \mid -646 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-646 - y = 45k$

et alors, d'après (*): $x - 374 = 26k$.

• Réciproquement, si $x = 374 + 26k$ et $y = -646 - 45k$ alors :

$45x + 26y = 45(374 + 26k) + 26(-646 - 45k) = \ldots$ (à faire) $= 34$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $45x + 26y = 34$ sont les couples $(374 + 26k, -646 - 45k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°71 : résoudre l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 24 :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 87 | = | 24 | × | 3 | + | 15 |
| (2) | 24 | = | 15 | × | 1 | + | 9 |
| (3) | 15 | = | 9 | × | 1 | + | 6 |
| (4) | 9 | = | 6 | × | 1 | + | 3 |
| (5) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(87, 24) = 3.

• $37 = 3 \times 12 + 1$ donc 3 ne divise pas 37
donc l'équation diophantienne $87x + 24y = 37$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°72 : résoudre l'équation diophantienne $51x + 45y = 6$.

CORRECTION

• <u>Algorithme d'Euclide</u> pour 51 et 45 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 51 | = | 45 | × | 1 | + | 6 |
| (2) | 45 | = | 6 | × | 7 | + | 3 |
| (3) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(51, 45) = 3.
En divisant par PGCD(51, 45) : $51x + 45y = 6 \iff 17x + 15y = 2$.

• <u>Recherche d'une solution particulière</u>
Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(1, -1)$.
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 17 et 15) et en multipliant par 2, on aurait trouvé la solution particulière (-14, 16).

• <u>Si x et y sont solutions</u> de l'équation $17x + 15y = 2$ :
$17x + 15y = 2$ et $17 \times 1 + 15 \times (-1) = 2$
donc, par soustraction : $17(x - 1) + 15(y + 1) = 0$
donc $17(x - 1) = 15(-1 - y)$. (*)
Or, 17 et 15 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $17 \mid -1 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-1 - y = 17k$
et alors, d'après (*): $x - 1 = 15k$.

• <u>Réciproquement</u>, si $x = 1 + 15k$ et $y = -1 - 17k$ alors :
$17x + 15y = 17(1 + 15k) + 15(-1 - 17k) = \ldots$ (à faire) $= 2$.

• <u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation $51x + 45y = 6$ sont les couples $(1 + 15k, -1 - 17k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°73 : résoudre l'équation diophantienne $24x + 44y = 8$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 44 et 24 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 44 | = | 24 | × | 1 | + | 20 |
| (2) | 24 | = | 20 | × | 1 | + | 4 |
| (3) | 20 | = | 4 | × | 5 | + | 0 |

donc PGCD(24, 44) = 4.
En divisant par PGCD(24, 44) : $24x + 44y = 8 \iff 6x + 11y = 2$.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(4, -2)$.
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 11 et 6) et en multipliant par 2, on aurait trouvé la solution particulière $(4, -2)$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $6x + 11y = 2$ :
$6x + 11y = 2$ et $6 \times 4 + 11 \times (-2) = 2$
donc, par soustraction : $6(x - 4) + 11(y + 2) = 0$
donc $6(x - 4) = 11(-2 - y)$. (*)
Or, 6 et 11 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $6 \mid -2 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-2 - y = 6k$
et alors, d'après (*): $x - 4 = 11k$.

• Réciproquement, si $x = 4 + 11k$ et $y = -2 - 6k$ alors :
$6x + 11y = 6(4 + 11k) + 11(-2 - 6k) = ...$ (à faire) $= 2$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $24x + 44y = 8$ sont les couples $(4 + 11k, -2 - 6k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°74 : résoudre l'équation diophantienne $33x + 78y = 66$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 78 et 33 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 78 | = | 33 | × | 2 | + | 12 |
| (2) | 33 | = | 12 | × | 2 | + | 9 |
| (3) | 12 | = | 9 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 9 | = | 3 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(33, 78) = 3.
En divisant par PGCD(33, 78) : $33x + 78y = 66 \iff 11x + 26y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière
Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(2, 0)$.
Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 26 et 11) et en multipliant par 22, on aurait trouvé la solution particulière (-154, 66).

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 26y = 22$ :
$11x + 26y = 22$ et $26 \times 0 = 22$
donc, par soustraction : $11(x - 2) + 26y = 0$
donc $11(x - 2) = -26y$. (*)
Or, 11 et 26 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-y = 11k$
et alors, d'après (*): $x - 2 = 26k$.

• Réciproquement, si $x = 2 + 26k$ et $y = -11k$ alors :
$11x + 26y = 11(2 + 26k) + 26(-11k) = \dots$ (à faire) $= 22$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $33x + 78y = 66$ sont les couples $(2 + 26k, -11k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°75 : résoudre l'équation diophantienne $16x + 94y = 24$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 94 et 16 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 94 | = | 16 | × | 5 | + | 14 |
| (2) | 16 | = | 14 | × | 1 | + | 2 |
| (3) | 14 | = | 2 | × | 7 | + | 0 |

donc PGCD(16, 94) = 2.
En divisant par PGCD(16, 94) : $16x + 94y = 24 \iff 8x + 47y = 12$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 8 et 47 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 47 | = | 8 | × | 5 | + | 7 |
| (2) | 8 | = | 7 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 7 | = | 1 | × | 7 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 8 | × | 1 | + | 7 | × | (-1) |
| (1) | 1 | = | 8 | × | 1 | + | (47-8×5) | × | (-1) |
| | 1 | = | 47 | × | (-1) | + | 8 | × | 6 |

On a donc : $8 \times 6 + 47 \times (-1) = 1$
puis en multipliant par 12 : $8 \times 72 + 47 \times (-12) = 12$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $8x + 47y = 12$ :
$8x + 47y = 12$ et $8 \times 72 + 47 \times (-12) = 12$
donc, par soustraction : $8(x - 72) + 47(y + 12) = 0$
donc $8(x - 72) = 47(-12 - y)$. (*)
Or, 8 et 47 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $8 \mid -12 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-12 - y = 8k$
et alors, d'après (*): $x - 72 = 47k$.

• Réciproquement, si $x = 72 + 47k$ et $y = -12 - 8k$ alors :
$8x + 47y = 8(72 + 47k) + 47(-12 - 8k) = \ldots$ (à faire) $= 12$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $16x + 94y = 24$ sont les couples $(72 + 47k, -12 - 8k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°76 : résoudre l'équation diophantienne $41x + 24y = 13$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 41 et 24 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 41 | = | 24 | × | 1 | + | 17 |
| (2) | 24 | = | 17 | × | 1 | + | 7 |
| (3) | 17 | = | 7 | × | 2 | + | 3 |
| (4) | 7 | = | 3 | × | 2 | + | 1 |
| (5) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(41, 24) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | 3 | × | (-2) |
| (3) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | (17-7×2) | × | (-2) |
| | 1 | = | 17 | × | (-2) | + | 7 | × | 5 |
| (2) | 1 | = | 17 | × | -2 | + | (24-17×1) | × | 5 |
| | 1 | = | 24 | × | 5 | + | 17 | × | (-7) |
| (1) | 1 | = | 24 | × | 5 | + | (41-24×1) | × | (-7) |
| | 1 | = | 41 | × | (-7) | + | 24 | × | 12 |

On a donc : $41 \times (-7) + 24 \times 12 = 1$

puis en multipliant par 13 : $41 \times (-91) + 24 \times 156 = 13$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 24y = 13$ :

$41x + 24y = 13$ et $41 \times (-91) + 24 \times 156 = 13$

donc, par soustraction : $41(x + 91) + 24(y - 156) = 0$

donc $41(x + 91) = 24(156 - y)$. (*)

Or, 41 et 24 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid 156 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $156 - y = 41k$

et alors, d'après (*): $x + 91 = 24k$.

• Réciproquement, si $x = -91 + 24k$ et $y = 156 - 41k$ alors :

$41x + 24y = 41(-91 + 24k) + 24(156 - 41k) = \ldots$ (à faire) $= 13$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $41x + 24y = 13$ sont les couples $(-91 + 24k,\ 156 - 41k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne $70x + 46y = 34$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 46 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 70 | = | 46 | × | 1 | + | 24 |
| (2) | 46 | = | 24 | × | 1 | + | 22 |
| (3) | 24 | = | 22 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 22 | = | 2 | × | 11 | + | 0 |

donc PGCD(70, 46) = 2.
En divisant par PGCD(70, 46) : $70x + 46y = 34 \iff 35x + 23y = 17$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 35 et 23 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 35 | = | 23 | × | 1 | + | 12 |
| (2) | 23 | = | 12 | × | 1 | + | 11 |
| (3) | 12 | = | 11 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 11 | = | 1 | × | 11 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 12 | × | 1 | + | 11 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 12 | × | 1 | + | (23-12×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 23 | × | (-1) | + | 12 | × | 2 |
| (1) | 1 | = | 23 | × | -1 | + | (35-23×1) | × | 2 |
| | 1 | = | 35 | × | 2 | + | 23 | × | (-3) |

On a donc : $35 \times 2 + 23 \times (-3) = 1$
puis en multipliant par 17 : $35 \times 34 + 23 \times (-51) = 17$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $35x + 23y = 17$ :
$35x + 23y = 17$ et $35 \times 34 + 23 \times (-51) = 17$
donc, par soustraction : $35(x - 34) + 23(y + 51) = 0$
donc $35(x - 34) = 23(-51 - y)$. (*)
Or, 35 et 23 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $35 \mid -51 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-51 - y = 35k$
et alors, d'après (*): $x - 34 = 23k$.

• Réciproquement, si $x = 34 + 23k$ et $y = -51 - 35k$ alors :
$35x + 23y = 35(34 + 23k) + 23(-51 - 35k) = \ldots$ (à faire) $= 17$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $70x + 46y = 34$ sont les couples
$(34 + 23k, -51 - 35k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 86 et 52 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 86 | = | 52 | × | 1 | + | 34 |
| (2) | 52 | = | 34 | × | 1 | + | 18 |
| (3) | 34 | = | 18 | × | 1 | + | 16 |
| (4) | 18 | = | 16 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 16 | = | 2 | × | 8 | + | 0 |

donc PGCD(52, 86) = 2.

• $25 = 2 \times 12 + 1$ donc 2 ne divise pas 25
donc l'équation diophantienne $52x + 86y = 25$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°79 : résoudre l'équation diophantienne $6x + y = 100$.

CORRECTION

• Conclusion : les solutions de l'équation $6x + y = 100$ sont évidemment les couples $(k, -6k + 100)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°80 : résoudre l'équation diophantienne $31x + 30y = 30$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 31 et 30 :

(1) $31 = 30 \times 1 + 1$

(2) $30 = 1 \times 30 + 0$

donc PGCD(31, 30) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(0, 1)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 31 et 30) et en multipliant par 30, on aurait trouvé la solution particulière (30, -30).

• Si x et y sont solutions de l'équation $31x + 30y = 30$ :

$31x + 30y = 30$ et $30 \times 1 = 30$

donc, par soustraction : $31x + 30(y - 1) = 0$

donc $31x = 30(1 - y)$. (*)

Or, 31 et 30 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $31 \mid 1 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $1 - y = 31k$

et alors, d'après (*): $x = 30k$.

• Réciproquement, si $x = 30k$ et $y = 1 - 31k$ alors :

$31x + 30y = 31(-30k) + 30(1 - 31k) = ...$ (à faire) $= 30$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $31x + 30y = 30$ sont les couples $(30k, 1 - 31k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°81 : résoudre l'équation diophantienne $30x + 2y = 26$.

CORRECTION

• $30 = 2 \times 15$
donc PGCD(30, 2) = 2.

En divisant par 2 : $30x + 2y = 26 \iff 15x + y = 13$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $30x + 2y = 26$ sont évidemment les couples $(k, -15k + 13)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°82 : résoudre l'équation diophantienne $97x + 56y = 15$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 97 et 56 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 97 | = | 56 | × | 1 | + | 41 |
| (2) | 56 | = | 41 | × | 1 | + | 15 |
| (3) | 41 | = | 15 | × | 2 | + | 11 |
| (4) | 15 | = | 11 | × | 1 | + | 4 |
| (5) | 11 | = | 4 | × | 2 | + | 3 |
| (6) | 4 | = | 3 | × | 1 | + | 1 |
| (7) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(97, 56) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(-1, 2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 97 et 56) et en multipliant par 15, on aurait trouvé la solution particulière (-225, 390).

• Si x et y sont solutions de l'équation $97x + 56y = 15$ :

$97x + 56y = 15$ et $97 \times (-1) + 56 \times 2 = 15$

donc, par soustraction : $97(x + 1) + 56(y - 2) = 0$

donc $97(x + 1) = 56(2 - y)$. (*)

Or, 97 et 56 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $97 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $2 - y = 97k$

et alors, d'après (*): $x + 1 = 56k$.

• Réciproquement, si $x = -1 + 56k$ et $y = 2 - 97k$ alors :

$97x + 56y = 97(-1 + 56k) + 56(2 - 97k) = \ldots$ (à faire) = 15.

• Conclusion : les solutions de l'équation $97x + 56y = 15$ sont les couples $(-1 + 56k, 2 - 97k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°83 : résoudre l'équation diophantienne $22x + 92y = 98$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 92 et 22 :

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & 92 & = & 22 & \times & 4 & + & 4 \\ (2) & 22 & = & 4 & \times & 5 & + & 2 \\ (3) & 4 & = & 2 & \times & 2 & + & 0 \end{array}$$

donc PGCD(22, 92) = 2.
En divisant par PGCD(22, 92) : $22x + 92y = 98 \iff 11x + 46y = 49$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 11 et 46 :

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & 46 & = & 11 & \times & 4 & + & 2 \\ (2) & 11 & = & 2 & \times & 5 & + & 1 \\ (3) & 2 & = & 1 & \times & 2 & + & 0 \end{array}$$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} (2) & 1 & = & 11 & \times & 1 & + & 2 & \times & (-5) \\ (1) & 1 & = & 11 & \times & 1 & + & (46-11\times4) & \times & (-5) \\ & 1 & = & 46 & \times & (-5) & + & 11 & \times & 21 \end{array}$$

On a donc : $11 \times 21 + 46 \times (-5) = 1$
puis en multipliant par 49 : $11 \times 1029 + 46 \times (-245) = 49$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $11x + 46y = 49$ :
$11x + 46y = 49$ et $11 \times 1029 + 46 \times (-245) = 49$
donc, par soustraction : $11(x - 1029) + 46(y + 245) = 0$
donc $11(x - 1029) = 46(-245 - y)$. (*)
Or, 11 et 46 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $11 \mid -245 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-245 - y = 11k$
et alors, d'après (*): $x - 1029 = 46k$.

• Réciproquement, si $x = 1029 + 46k$ et $y = -245 - 11k$ alors :
$11x + 46y = 11(1029 + 46k) + 46(-245 - 11k) = \ldots$ (à faire) $= 49$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $22x + 92y = 98$ sont les couples $(1029 + 46k, -245 - 11k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°84 : résoudre l'équation diophantienne 21x + 55y = 46.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 55 et 21 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 55 | = | 21 | × | 2 | + | 13 |
| (2) | 21 | = | 13 | × | 1 | + | 8 |
| (3) | 13 | = | 8 | × | 1 | + | 5 |
| (4) | 8 | = | 5 | × | 1 | + | 3 |
| (5) | 5 | = | 3 | × | 1 | + | 2 |
| (6) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (7) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(21, 55) = 1.

• Recherche d'une solution particulière
On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (6) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (5) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (5-3×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 5 | × | (-1) | + | 3 | × | 2 |
| (4) | 1 | = | 5 | × | -1 | + | (8-5×1) | × | 2 |
| | 1 | = | 8 | × | 2 | + | 5 | × | (-3) |
| (3) | 1 | = | 8 | × | 2 | + | (13-8×1) | × | (-3) |
| | 1 | = | 13 | × | (-3) | + | 8 | × | 5 |
| (2) | 1 | = | 13 | × | -3 | + | (21-13×1) | × | 5 |
| | 1 | = | 21 | × | 5 | + | 13 | × | (-8) |
| (1) | 1 | = | 21 | × | 5 | + | (55-21×2) | × | (-8) |
| | 1 | = | 55 | × | (-8) | + | 21 | × | 21 |

On a donc : 21 × 21 + 55 × (-8) = 1
puis en multipliant par 46 : 21 × 966 + 55 × (-368) = 46.

• Si x et y sont solutions de l'équation 21x + 55y = 46 :
21x + 55y = 46 et 21 × 966 + 55 × (-368) = 46
donc, par soustraction : 21(x - 966) + 55(y + 368) = 0
donc 21(x - 966) = 55(-368 - y). (*)
Or, 21 et 55 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 21 | -368 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -368 - y = 21$k$
et alors, d'après (*): x - 966 = 55$k$.

• Réciproquement, si x = 966 + 55$k$ et y = -368 - 21$k$ alors :
21x + 55y = 21(966 + 55$k$) + 55(-368 - 21$k$) = ... (à faire) = 46.

• Conclusion : les solutions de l'équation 21x + 55y = 46 sont les couples (966 + 55$k$, -368 - 21$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°85 : résoudre l'équation diophantienne $82x + 74y = 38$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 82 et 74 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 82 | = | 74 | × | 1 | + | 8 |
| (2) | 74 | = | 8 | × | 9 | + | 2 |
| (3) | 8 | = | 2 | × | 4 | + | 0 |

donc PGCD(82, 74) = 2.
En divisant par PGCD(82, 74) : $82x + 74y = 38 \Leftrightarrow 41x + 37y = 19$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 41 et 37 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 41 | = | 37 | × | 1 | + | 4 |
| (2) | 37 | = | 4 | × | 9 | + | 1 |
| (3) | 4 | = | 1 | × | 4 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(2) $1 = 37 \times 1 + 4 \times (-9)$
(1) $1 = 37 \times 1 + (41-37\times1) \times (-9)$
$1 = 41 \times (-9) + 37 \times 10$

On a donc : $41 \times (-9) + 37 \times 10 = 1$
puis en multipliant par 19 : $41 \times (-171) + 37 \times 190 = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $41x + 37y = 19$ :
$41x + 37y = 19$ et $41 \times (-171) + 37 \times 190 = 19$
donc, par soustraction : $41(x + 171) + 37(y - 190) = 0$
donc $41(x + 171) = 37(190 - y)$. (*)
Or, 41 et 37 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $41 \mid 190 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $190 - y = 41k$
et alors, d'après (*): $x + 171 = 37k$.

• Réciproquement, si $x = -171 + 37k$ et $y = 190 - 41k$ alors :
$41x + 37y = 41(-171 + 37k) + 37(190 - 41k) = \ldots$ (à faire) $= 19$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $82x + 74y = 38$ sont les couples $(-171 + 37k,\ 190 - 41k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°86 : résoudre l'équation diophantienne $2x + 71y = 54$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 71 et 2 :

(1) $71 = 2 \times 35 + 1$

(2) $2 = 1 \times 2 + 0$

donc $PGCD(2, 71) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 71 \times 1 + 2 \times (-35)$

On a donc : $2 \times (-35) + 71 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 54 : $2 \times (-1890) + 71 \times 54 = 54$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $2x + 71y = 54$ :

$2x + 71y = 54$ et $2 \times (-1890) + 71 \times 54 = 54$

donc, par soustraction : $2(x + 1890) + 71(y - 54) = 0$

donc $2(x + 1890) = 71(54 - y)$. (*)

Or, 2 et 71 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $2 \mid 54 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $54 - y = 2k$

et alors, d'après (*): $x + 1890 = 71k$.

• Réciproquement, si $x = -1890 + 71k$ et $y = 54 - 2k$ alors :

$2x + 71y = 2(-1890 + 71k) + 71(54 - 2k) = ...$ (à faire) $= 54$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $2x + 71y = 54$ sont les couples $(-1890 + 71k, 54 - 2k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°87 : résoudre l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 70 et 6 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 70 | = | 6 | × | 11 | + | 4 |
| (2) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (3) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(6, 70) = 2.

• $73 = 2 \times 36 + 1$ donc 2 ne divise pas 73
donc l'équation diophantienne $6x + 70y = 73$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°88 : résoudre l'équation diophantienne $15x + 93y = 90$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 93 et 15 :

(1) $93 = 15 \times 6 + 3$

(2) $15 = 3 \times 5 + 0$

donc PGCD(15, 93) = 3.

En divisant par PGCD(15, 93) : $15x + 93y = 90 \iff 5x + 31y = 30$.

• Recherche d'une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour 5 et 31 :

(1) $31 = 5 \times 6 + 1$

(2) $5 = 1 \times 5 + 0$

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(1) $1 = 31 \times 1 + 5 \times (-6)$

On a donc : $5 \times (-6) + 31 \times 1 = 1$

puis en multipliant par 30 : $5 \times (-180) + 31 \times 30 = 30$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $5x + 31y = 30$ :

$5x + 31y = 30$ et $5 \times (-180) + 31 \times 30 = 30$

donc, par soustraction : $5(x + 180) + 31(y - 30) = 0$

donc $5(x + 180) = 31(30 - y)$. (*)

Or, 5 et 31 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $5 \mid 30 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $30 - y = 5k$

et alors, d'après (*): $x + 180 = 31k$.

• Réciproquement, si $x = -180 + 31k$ et $y = 30 - 5k$ alors :

$5x + 31y = 5(-180 + 31k) + 31(30 - 5k) = \ldots$ (à faire) $= 30$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $15x + 93y = 90$ sont les couples $(-180 + 31k,\ 30 - 5k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°89 : résoudre l'équation diophantienne $54x + 56y = 92$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 56 et 54 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 56 | = | 54 | × | 1 | + | 2 |
| (2) | 54 | = | 2 | × | 27 | + | 0 |

donc PGCD(54, 56) = 2.
En divisant par PGCD(54, 56) : $54x + 56y = 92 \iff 27x + 28y = 46$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 27 et 28 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 28 | = | 27 | × | 1 | + | 1 |
| (2) | 27 | = | 1 | × | 27 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :
(1) $1 = 28 \times 1 + 27 \times (-1)$

On a donc : $27 \times (-1) + 28 \times 1 = 1$
puis en multipliant par 46 : $27 \times (-46) + 28 \times 46 = 46$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $27x + 28y = 46$ :
$27x + 28y = 46$ et $27 \times (-46) + 28 \times 46 = 46$
donc, par soustraction : $27(x + 46) + 28(y - 46) = 0$
donc $27(x + 46) = 28(46 - y)$. (*)
Or, 27 et 28 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $27 \mid 46 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $46 - y = 27k$
et alors, d'après (*): $x + 46 = 28k$.

• Réciproquement, si $x = -46 + 28k$ et $y = 46 - 27k$ alors :
$27x + 28y = 27(-46 + 28k) + 28(46 - 27k) = \ldots$ (à faire) $= 46$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $54x + 56y = 92$ sont les couples $(-46 + 28k,\ 46 - 27k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°90 : résoudre l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$.

CORRECTION

• $55 = 11 \times 5$
donc PGCD(55, 11) = 11.

• 11 ne divise pas 6
donc l'équation diophantienne $55x + 11y = 6$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°91 : résoudre l'équation diophantienne 84x + 97y = 91.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 97 et 84 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 97 | = | 84 | × | 1 | + | 13 |
| (2) | 84 | = | 13 | × | 6 | + | 6 |
| (3) | 13 | = | 6 | × | 2 | + | 1 |
| (4) | 6 | = | 1 | × | 6 | + | 0 |

donc PGCD(84, 97) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 13 | × | 1 | + | 6 | × | (-2) |
| (2) | 1 | = | 13 | × | 1 | + | (84-13×6) | × | (-2) |
| | 1 | = | 84 | × | (-2) | + | 13 | × | 13 |
| (1) | 1 | = | 84 | × | -2 | + | (97-84×1) | × | 13 |
| | 1 | = | 97 | × | 13 | + | 84 | × | (-15) |

On a donc : 84 × (-15) + 97 × 13 = 1
puis en multipliant par 91 : 84 × (-1365) + 97 × 1183 = 91.

• Si x et y sont solutions de l'équation 84x + 97y = 91 :
84x + 97y = 91 et 84 × (-1365) + 97 × 1183 = 91
donc, par soustraction : 84(x + 1365) + 97(y - 1183) = 0
donc 84(x + 1365) = 97(1183 - y). (*)
Or, 84 et 97 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 84 | 1183 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que 1183 - y = 84$k$
et alors, d'après (*): x + 1365 = 97$k$.

• Réciproquement, si x = -1365 + 97$k$ et y = 1183 - 84$k$ alors :
84x + 97y = 84(-1365 + 97$k$) + 97(1183 - 84$k$) = ... (à faire) = 91.

• Conclusion : les solutions de l'équation 84x + 97y = 91 sont les couples
(-1365 + 97$k$, 1183 - 84$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°92 : résoudre l'équation diophantienne $32x + 14y = 44$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 32 et 14 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 32 | = | 14 | × | 2 | + | 4 |
| (2) | 14 | = | 4 | × | 3 | + | 2 |
| (3) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(32, 14) = 2.
En divisant par PGCD(32, 14) : $32x + 14y = 44 \iff 16x + 7y = 22$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 16 et 7 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 16 | = | 7 | × | 2 | + | 2 |
| (2) | 7 | = | 2 | × | 3 | + | 1 |
| (3) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | 2 | × | (-3) |
| (1) | 1 | = | 7 | × | 1 | + | (16-7×2) | × | (-3) |
| | 1 | = | 16 | × | (-3) | + | 7 | × | 7 |

On a donc : $16 \times (-3) + 7 \times 7 = 1$
puis en multipliant par 22 : $16 \times (-66) + 7 \times 154 = 22$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $16x + 7y = 22$ :
$16x + 7y = 22$ et $16 \times (-66) + 7 \times 154 = 22$
donc, par soustraction : $16(x + 66) + 7(y - 154) = 0$
donc $16(x + 66) = 7(154 - y)$. (*)
Or, 16 et 7 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $16 \mid 154 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $154 - y = 16k$
et alors, d'après (*): $x + 66 = 7k$.

• Réciproquement, si $x = -66 + 7k$ et $y = 154 - 16k$ alors :
$16x + 7y = 16(-66 + 7k) + 7(154 - 16k) = \ldots$ (à faire) $= 22$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $32x + 14y = 44$ sont les couples $(-66 + 7k,\ 154 - 16k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°93 : résoudre l'équation diophantienne $69x + 60y = 45$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 69 et 60 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 69 | = | 60 | × | 1 | + | 9 |
| (2) | 60 | = | 9 | × | 6 | + | 6 |
| (3) | 9 | = | 6 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(69, 60) = 3.
En divisant par PGCD(69, 60) : $69x + 60y = 45 \iff 23x + 20y = 15$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 23 et 20 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 23 | = | 20 | × | 1 | + | 3 |
| (2) | 20 | = | 3 | × | 6 | + | 2 |
| (3) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (4) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (2) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (20-3×6) | × | (-1) |
| | 1 | = | 20 | × | (-1) | + | 3 | × | 7 |
| (1) | 1 | = | 20 | × | -1 | + | (23-20×1) | × | 7 |
| | 1 | = | 23 | × | 7 | + | 20 | × | (-8) |

On a donc : $23 \times 7 + 20 \times (-8) = 1$
puis en multipliant par 15 : $23 \times 105 + 20 \times (-120) = 15$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $23x + 20y = 15$ :
$23x + 20y = 15$ et $23 \times 105 + 20 \times (-120) = 15$
donc, par soustraction : $23(x - 105) + 20(y + 120) = 0$
donc $23(x - 105) = 20(-120 - y)$. (*)
Or, 23 et 20 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $23 \mid -120 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-120 - y = 23k$
et alors, d'après (*): $x - 105 = 20k$.

• Réciproquement, si $x = 105 + 20k$ et $y = -120 - 23k$ alors :
$23x + 20y = 23(105 + 20k) + 20(-120 - 23k) = \ldots$ (à faire) $= 15$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $69x + 60y = 45$ sont les couples
$(105 + 20k, -120 - 23k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°94 : résoudre l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 34 et 24 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 34 | = | 24 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 24 | = | 10 | × | 2 | + | 4 |
| (3) | 10 | = | 4 | × | 2 | + | 2 |
| (4) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(34, 24) = 2.

• $43 = 2 \times 21 + 1$ donc 2 ne divise pas 43
donc l'équation diophantienne $34x + 24y = 43$ n'admet pas de solutions.

Exercice n°95 : résoudre l'équation diophantienne $29x + 15y = 59$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 29 et 15 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 29 | = | 15 | × | 1 | + | 14 |
| (2) | 15 | = | 14 | × | 1 | + | 1 |
| (3) | 14 | = | 1 | × | 14 | + | 0 |

donc PGCD(29, 15) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière évidente est $(x_0, y_0)=(1, 2)$.

Remarque : en remontant l'algorithme d'Euclide (pour 29 et 15) et en multipliant par 59, on aurait trouvé la solution particulière (-59, 118).

• Si x et y sont solutions de l'équation $29x + 15y = 59$ :

$29x + 15y = 59$ et $29 \times 1 + 15 \times 2 = 59$

donc, par soustraction : $29(x - 1) + 15(y - 2) = 0$

donc $29(x - 1) = 15(2 - y)$. (*)

Or, 29 et 15 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $29 \mid 2 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $2 - y = 29k$

et alors, d'après (*): $x - 1 = 15k$.

• Réciproquement, si $x = 1 + 15k$ et $y = 2 - 29k$ alors :

$29x + 15y = 29(1 + 15k) + 15(2 - 29k) = \dots$ (à faire) $= 59$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $29x + 15y = 59$ sont les couples $(1 + 15k, 2 - 29k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°96 : résoudre l'équation diophantienne $66x + 56y = 88$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 66 et 56 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 66 | = | 56 | × | 1 | + | 10 |
| (2) | 56 | = | 10 | × | 5 | + | 6 |
| (3) | 10 | = | 6 | × | 1 | + | 4 |
| (4) | 6 | = | 4 | × | 1 | + | 2 |
| (5) | 4 | = | 2 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(66, 56) = 2.
En divisant par PGCD(66, 56) : $66x + 56y = 88 \Leftrightarrow 33x + 28y = 44$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 33 et 28 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 33 | = | 28 | × | 1 | + | 5 |
| (2) | 28 | = | 5 | × | 5 | + | 3 |
| (3) | 5 | = | 3 | × | 1 | + | 2 |
| (4) | 3 | = | 2 | × | 1 | + | 1 |
| (5) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | 2 | × | (-1) |
| (3) | 1 | = | 3 | × | 1 | + | (5-3×1) | × | (-1) |
| | 1 | = | 5 | × | (-1) | + | 3 | × | 2 |
| (2) | 1 | = | 5 | × | -1 | + | (28-5×5) | × | 2 |
| | 1 | = | 28 | × | 2 | + | 5 | × | (-11) |
| (1) | 1 | = | 28 | × | 2 | + | (33-28×1) | × | (-11) |
| | 1 | = | 33 | × | (-11) | + | 28 | × | 13 |

On a donc : $33 \times (-11) + 28 \times 13 = 1$
puis en multipliant par 44 : $33 \times (-484) + 28 \times 572 = 44$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $33x + 28y = 44$ :
$33x + 28y = 44$ et $33 \times (-484) + 28 \times 572 = 44$
donc, par soustraction : $33(x + 484) + 28(y - 572) = 0$
donc $33(x + 484) = 28(572 - y)$. (*)
Or, 33 et 28 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $33 \mid 572 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $572 - y = 33k$
et alors, d'après (*): $x + 484 = 28k$.

• Réciproquement, si $x = -484 + 28k$ et $y = 572 - 33k$ alors :
$33x + 28y = 33(-484 + 28k) + 28(572 - 33k) = ...$ (à faire) $= 44$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $66x + 56y = 88$ sont les couples $(-484 + 28k, 572 - 33k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°97 : résoudre l'équation diophantienne $75x + 6y = 78$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 75 et 6 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 75 | = | 6 | × | 12 | + | 3 |
| (2) | 6 | = | 3 | × | 2 | + | 0 |

donc PGCD(75, 6) = 3.
En divisant par PGCD(75, 6) : $75x + 6y = 78 \Leftrightarrow 25x + 2y = 26$.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 25 et 2 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 25 | = | 2 | × | 12 | + | 1 |
| (2) | 2 | = | 1 | × | 2 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :
(1) $1 = 25 \times 1 + 2 \times (-12)$

Puis en multipliant par 26 : $25 \times 26 + 2 \times (-312) = 26$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $25x + 2y = 26$ :
$25x + 2y = 26$ et $25 \times 26 + 2 \times (-312) = 26$
donc, par soustraction : $25(x - 26) + 2(y + 312) = 0$
donc $25(x - 26) = 2(-312 - y)$. (*)
Or, 25 et 2 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : $25 \mid -312 - y$
donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-312 - y = 25k$
et alors, d'après (*): $x - 26 = 2k$.

• Réciproquement, si $x = 26 + 2k$ et $y = -312 - 25k$ alors :
$25x + 2y = 25(26 + 2k) + 2(-312 - 25k) = \ldots$ (à faire) $= 26$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $75x + 6y = 78$ sont les couples $(26 + 2k, -312 - 25k)$, où $k$ entier relatif.

Exercice n°98 : résoudre l'équation diophantienne 33x + 87y = 51.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 87 et 33 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 87 | = | 33 | × | 2 | + | 21 |
| (2) | 33 | = | 21 | × | 1 | + | 12 |
| (3) | 21 | = | 12 | × | 1 | + | 9 |
| (4) | 12 | = | 9 | × | 1 | + | 3 |
| (5) | 9 | = | 3 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(33, 87) = 3.
En divisant par PGCD(33, 87) : 33x + 87y = 51 <=> 11x + 29y = 17.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 11 et 29 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 29 | = | 11 | × | 2 | + | 7 |
| (2) | 11 | = | 7 | × | 1 | + | 4 |
| (3) | 7 | = | 4 | × | 1 | + | 3 |
| (4) | 4 | = | 3 | × | 1 | + | 1 |
| (5) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | 1 | = | 4 | × | 1 | + | 3 | × | (-1) | |
| (3) | 1 | = | 4 | × | 1 | + | (7-4×1) | × | (-1) | |
| | 1 | = | 7 | × | (-1) | + | 4 | × | 2 | |
| (2) | 1 | = | 7 | × | -1 | + | (11-7×1) | × | 2 | |
| | 1 | = | 11 | × | 2 | + | 7 | × | (-3) | |
| (1) | 1 | = | 11 | × | 2 | + | (29-11×2) | × | (-3) | |
| | 1 | = | 29 | × | (-3) | + | 11 | × | 8 | |

On a donc : 11 × 8 + 29 × (-3) = 1
puis en multipliant par 17 : 11 × 136 + 29 × (-51) = 17.

• Si x et y sont solutions de l'équation 11x + 29y = 17 :
11x + 29y = 17 et 11 × 136 + 29 × (-51) = 17
donc, par soustraction : 11(x - 136) + 29(y + 51) = 0
donc 11(x - 136) = 29(-51 - y). (*)
Or, 11 et 29 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 11 | -51 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -51 - y = 11$k$
et alors, d'après (*): x - 136 = 29$k$.

• Réciproquement, si x = 136 + 29$k$ et y = -51 - 11$k$ alors :
11x + 29y = 11(136 + 29$k$) + 29(-51 - 11$k$) = ... (à faire) = 17.

• Conclusion : les solutions de l'équation 33x + 87y = 51 sont les couples (136 + 29$k$, -51 - 11$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°99 : résoudre l'équation diophantienne 62x + 68y = 28.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 68 et 62 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 68 | = | 62 | × | 1 | + | 6 |
| (2) | 62 | = | 6 | × | 10 | + | 2 |
| (3) | 6 | = | 2 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(62, 68) = 2.
En divisant par PGCD(62, 68) : 62x + 68y = 28 <=> 31x + 34y = 14.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 31 et 34 :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 34 | = | 31 | × | 1 | + | 3 |
| (2) | 31 | = | 3 | × | 10 | + | 1 |
| (3) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | 1 | = | 31 | × | 1 | + | 3 | × | (-10) |
| (1) | 1 | = | 31 | × | 1 | + | (34-31×1) | × | (-10) |
| | 1 | = | 34 | × | (-10) | + | 31 | × | 11 |

On a donc : 31 × 11 + 34 × (-10) = 1
puis en multipliant par 14 : 31 × 154 + 34 × (-140) = 14.

• Si x et y sont solutions de l'équation 31x + 34y = 14 :
31x + 34y = 14 et 31 × 154 + 34 × (-140) = 14
donc, par soustraction : 31(x - 154) + 34(y + 140) = 0
donc 31(x - 154) = 34(-140 - y). (*)
Or, 31 et 34 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 31 | -140 - y
donc il existe un entier relatif $k$ tel que -140 - y = 31$k$
et alors, d'après (*): x - 154 = 34$k$.

• Réciproquement, si x = 154 + 34$k$ et y = -140 - 31$k$ alors :
31x + 34y = 31(154 + 34$k$) + 34(-140 - 31$k$) = ... (à faire) = 14.

• Conclusion : les solutions de l'équation 62x + 68y = 28 sont les couples (154 + 34$k$, -140 - 31$k$), où $k$ entier relatif.

Exercice n°100 : résoudre l'équation diophantienne $99x + 83y = 19$.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 99 et 83 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 99 | = | 83 | × | 1 | + | 16 |
| (2) | 83 | = | 16 | × | 5 | + | 3 |
| (3) | 16 | = | 3 | × | 5 | + | 1 |
| (4) | 3 | = | 1 | × | 3 | + | 0 |

donc PGCD(99, 83) = 1.

• Recherche d'une solution particulière

On remonte l'algorithme d'Euclide :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3) | 1 | = | 16 | × | 1 | + | 3 | × | (-5) |
| (2) | 1 | = | 16 | × | 1 | + | (83-16×5) | × | (-5) |
| | 1 | = | 83 | × | (-5) | + | 16 | × | 26 |
| (1) | 1 | = | 83 | × | -5 | + | (99-83×1) | × | 26 |
| | 1 | = | 99 | × | 26 | + | 83 | × | (-31) |

On a donc : $99 \times 26 + 83 \times (-31) = 1$

puis en multipliant par 19 : $99 \times 494 + 83 \times (-589) = 19$.

• Si x et y sont solutions de l'équation $99x + 83y = 19$ :

$99x + 83y = 19$ et $99 \times 494 + 83 \times (-589) = 19$

donc, par soustraction : $99(x - 494) + 83(y + 589) = 0$

donc $99(x - 494) = 83(-589 - y)$. (*)

Or, 99 et 83 sont premiers entre eux

donc, d'après le théorème de Gauss : $99 \mid -589 - y$

donc il existe un entier relatif $k$ tel que $-589 - y = 99k$

et alors, d'après (*): $x - 494 = 83k$.

• Réciproquement, si $x = 494 + 83k$ et $y = -589 - 99k$ alors :

$99x + 83y = 99(494 + 83k) + 83(-589 - 99k) = ...$ (à faire) $= 19$.

• Conclusion : les solutions de l'équation $99x + 83y = 19$ sont les couples $(494 + 83k, -589 - 99k)$, où $k$ entier relatif.