**Nom** : ........................................................ **Prénom** : ..............................................

# RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

# MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées.

## EXERCICE 1 [5 points] *D'après BAC S 2011*

*Les parties A et B sont indépendantes.*

*Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis à* $10^{-4}$ .

Dans le *Point épidémiologique Covid-19 du 31 décembre 2020* sur `santepubliquefrance.fr`, on peut lire : « Le point épidémiologique présente l'estimation de la prévalence des infections par le SARS-CoV-2 en France pour la semaine 41 (du 05 au 11 octobre 2020), avant le couvre-feu généralisé et le 2ème confinement national. La proportion de personnes séropositives pour le SARS-CoV-2 en semaine 41 est estimée à 7,9 % soit 5 256 000 personnes séropositives. »

Nous supposerons donc, dans cet exercice, que 7,9 % de la population française est contaminée par le SARS-CoV-2.

### Partie A

On dispose d'un test de dépistage, appelé *test PCR*, qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif[1] est de 0,83 (sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,99 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le SARS-CoV-2 » et T l'événement « le *test PCR* est positif ».

**1.** Traduire la situation par un arbre de probabilités, en détaillant les calculs.

**2.** Déterminer la probabilité qu'un *test PCR* soit positif.

**3.** On souhaite calculer la *valeur prédictive positive*, notée VPP, qui est la probabilité qu'une personne soit contaminée sachant que le *test PCR* est positif. Déterminer cette VPP.

### Partie B

On choisit au hasard et successivement 450 personnes de la population française. On considère que les tirages aléatoires sont indépendants et peuvent être assimilés à des tirages avec remise (puisque la population française est assez grande). On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le SARS-CoV-2.

**1.** Déterminer la loi de probabilité de X.

**2.** Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

**3.** Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 personnes contaminées parmi les 450.

1 Pour info : d'après les données bibliographiques à disposition, la sensibilité peut être estimée entre 68 % et 97 %.
Voir revmed.ch et has-sante.fr.

## EXERCICE 2 [5 points] *D'après BAC S 2011*

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.

On considère le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{D};\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DC}},\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)$.

On note K le point de l'espace tel que : $\overrightarrow{\mathrm{KD}}+2\overrightarrow{\mathrm{KF}}=\vec{0}$.

### Partie A

**1.** Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

**2.** Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

**3.** Calculer la distance EK.

### Partie B

Soit M un point du segment [HG]. On note $m=\mathrm{HM}$ ($m$ est donc un réel appartenant à $[0;1]$).

On a alors : $\overrightarrow{\mathrm{HM}}=m\overrightarrow{\mathrm{HG}}$.

**1. a.** Démontrer que (DH) est la hauteur relative à la base EMF du tétraèdre EMFD.

**b.** On rappelle que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire d'une base et de sa hauteur relative. En déduire que, pour tout réel $m$ de $[0;1]$, le volume du tétraèdre EMFD est égal, en unités de volume, à $\frac{1}{6}$.

**2.** On admet que $\vec{n}(-1+m;1;-m)$ est un vecteur normal au plan (MFD).

**a.** Montrer que la distance du point E au plan (MFD), notée $d(m)$, est : $d(m)=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

**b.** On admet que la fonction $d$ définie ci-dessus est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$. En déduire que lorsque la distance du point E au plan (MFD) est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

## EXERCICE 3 [5 points] *D'après BAC S 2016*

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=x$.

**2.** Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-contre, dont la dérivabilité de la fonction $f$, à l'exception de la limite en $+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | ↗ | | $+\infty$ |

**3.** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

**4.** On considère le script Python suivant :

```
from math import log
def exobac(A):
    N = 0
    while N-log(N**2+1)<A:
        N = N+1
    return N
```

**a.** Que fait cette fonction ?

**b.** Déterminer la valeur N renvoyée lorsqu'on exécute `exobac(100)`.

### Partie B

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)$.

**1.** Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

**2.** Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

**3. a.** Démontrer que $(u_n)$ est convergente vers un réel que l'on note $l$.

**b.** Déterminer $l$.

## EXERCICE 4 [5 points]

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*

*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{5x^2}(1+3x^2)$ .

La fonction dérivée de $f$ est la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

**A.** $60x^2e^{5x^2}$ **B.** $2xe^{5x^2}(15x^2+8)$ **C.** $e^{5x^2}(-30x^3-4x)$ **D.** $60x^2e^{5x^2}$

**2.** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$u_0=1\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n} \text{ et } v_n=\ln(u_n)-\ln(2)\ .$$

**a)** **A.** La suite $(u_n)$ est géométrique **B.** La suite $(u_n)$ est divergente

**C.** La suite $(u_n)$ est majorée par 2 **D.** La suite $(u_n)$ converge vers 0

**b)** **A.** La suite $(v_n)$ est géométrique **B.** La suite $(v_n)$ converge vers 2

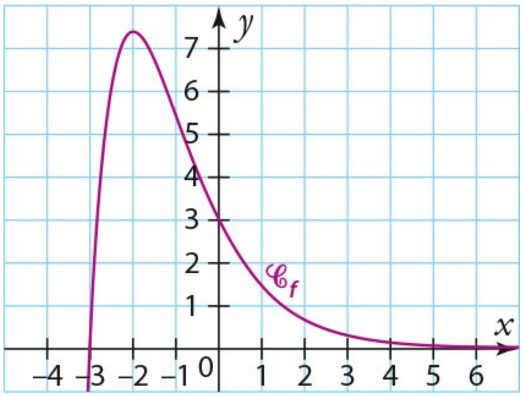
**C.** La suite $(v_n)$ est minorée par 2 **D.** La suite $(v_n)$ est divergente

**3.** On considère une fonction $f$ dont la courbe représentative est sur le graphique ci-contre.

$f''(-1)$ est proche de :

**A.** 3 **B.** 5,5

**C.** $-3$ **D.** 0




**4.** $\binom{2019}{1000}+\binom{2019}{1001}+\binom{2020}{1002}$ est égal à :

**A.** $\binom{2021}{1002}$ **B.** $\binom{2020}{1002}$ **C.** $\binom{2021}{1001}$ **D.** $\binom{2020}{1001}$