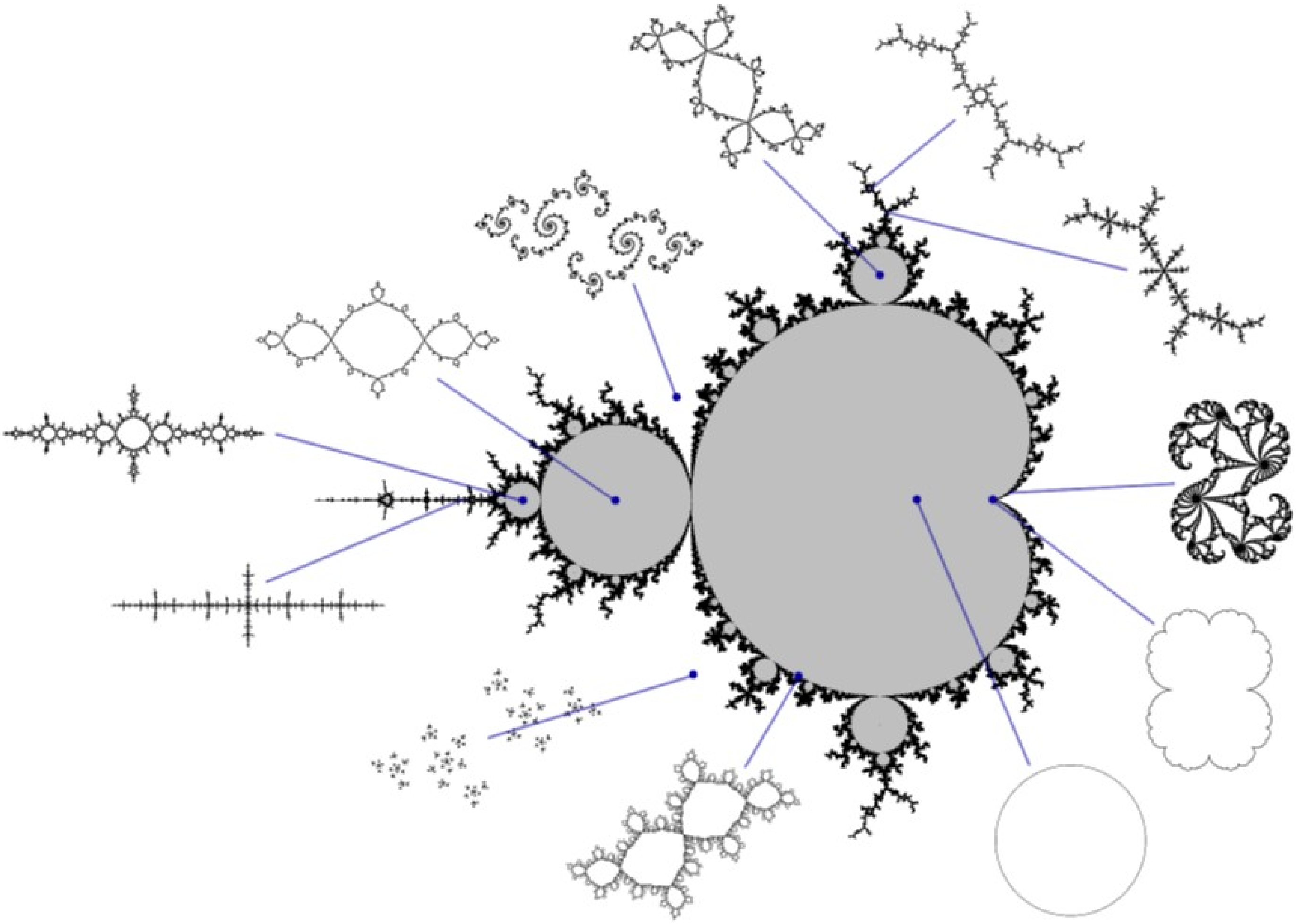
Tle option ME

NOMBRES COMPLEXES : POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE ET APPLICATIONS



Source : http://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot.html

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Le plan est muni d'un **repère orthonormé direct** $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

I. Représentation géométrique d'un nombre complexe

DÉFINITION

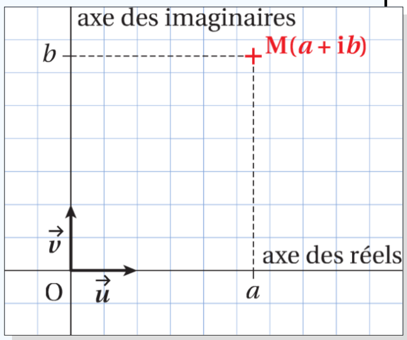
À tout nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$, on peut associer :

- l'unique vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$,

qu'on appelle vecteur image de z

- l'unique point M de coordonnées $(a\,;b)$,

qu'on appelle point d'affixe z.



Réciproquement, à tout vecteur $\vec{w}$ ou tout point M du plan de coordonnées $(a\,;b)$, on peut associer le complexe $z=a+\mathrm{i}b$, qu'on appelle ***affixe du* vecteur** $\vec{w}$ ou ***affixe du point M***.

On note souvent z_{M} l'affixe d'un point M. On peut écrire alors $\mathrm{M}(z_{\mathrm{M}})$.

PROPRIÉTÉS (ÉVIDENTES)

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{v}}$ et $z_{\vec{w}}$.

- $z_{\vec{v}+\vec{w}}=z_{\vec{v}}+z_{\vec{w}}$
- $z_{-\vec{v}}=-z_{\vec{v}}$
- $\forall\, k\in\mathbb{R},\ z_{k\vec{v}}=k\,z_{\vec{v}}$

PROPRIÉTÉ

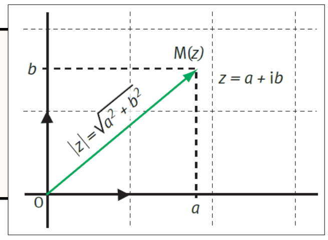
Soient M et N deux point du plan d'affixes respectives z_{M} et z_{N}. Alors : $z_{\overrightarrow{\mathrm{MN}}}=z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{M}}$.

Démonstration :

PROPRIÉTÉ (ÉVIDENTE)

Soit M un point d'affixe z. Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM.

Si $z=a+\mathrm{i}b$ alors $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.



PROPRIÉTÉS

Soit $(z;z')\in\mathbb{C}^2$.

- $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|\bar{z}|=|z|$
- $z\,\bar{z}=|z|^2$
- $|z\,z'|=|z||z'|$ et donc : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |z^n|=|z|^n$
- si $z\neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

__Démonstrations__ :

PROPRIÉTÉS

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

Alors : $AB=|z_B-z_A|$ et $\dfrac{AB}{CD}=\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right|$.

__Démonstrations__ :

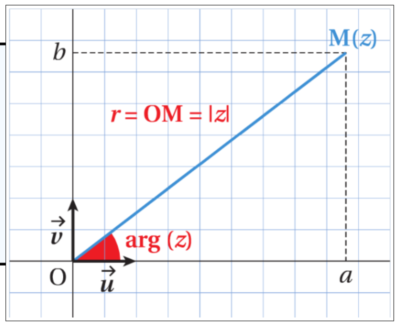
Soit E le point d'affixe z_B-z_A. Donc : $z_E=z_B-z_A$.

Or : $z_E=z_{\overrightarrow{OE}}$ et $z_B-z_A=z_{\overrightarrow{AB}}$, donc $z_{\overrightarrow{OE}}=z_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AB}$ et par conséquent $OE=AB$.

Or : $OE=|z_E|=|z_B-z_A|$ donc $|z_B-z_A|=AB$.

La propriété suivante est une simple conséquence de cela et $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.

II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe



DÉFINITION

Soit z un nombre complexe non nul, et M son image.

On appelle ***argument de z***, et on note $\arg(z)$, une mesure (exprimée en radians) de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

REMARQUES :

- on a donc $\arg(z)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$ et z a une infinité d'arguments !
  Par abus de notation, car il n'y a aucune confusion possible, on note plutôt par exemple $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$.
- le nombre 0 n'a pas d'argument.

Graphiquement, on obtient facilement :

PROPRIÉTÉS

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(\bar{z})=$
- $\arg(-z)=$

PROPRIÉTÉ-DÉFINITION (FORME TRIGONOMÉTRIQUE)

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Alors : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Cette écriture s'appelle ***la forme trigonométrique de z***.

Démonstration :

L'argument θ vérifie $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (faire un dessin : repère orthonormé !).

$$z=a+ib=a\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}+ib\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=|z|(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Écrire un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique correspond géométriquement à repérer un point par des coordonnées (dites) polaires, le plan étant muni d'un repère orthonormé direct.

PROPRIÉTÉ

Soit z un nombre complexe non nul.

Si $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ (où $r>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$), alors : $|z|=r$ et $\arg(z)=\alpha$ $[2\pi]$.

Démonstration :

$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ donc $|z|=|r||\cos\alpha+i\sin\alpha|=r\times1=r$.

On a donc $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. Notons θ un argument de z. Alors : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.

D'où : $\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ et donc $\cos\alpha=\cos\theta$ et $\sin\alpha=\sin\theta$.

On en déduit donc : $\alpha=\theta+2k\pi$ (faire un dessin – cercle trigo. – ou utiliser équations de 1°S).

Ce qui signifie : $\arg(z)=\theta$ (modulo 2π).

EXEMPLES C1 ET C2

- $5\left(\cos\frac{\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)$ est la forme trigonométrique du nombre complexe de module 5 et d'argument $\frac{\pi}{7}$

- Soit $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}\right)$. Ce n'est pas la forme trigonométrique car $-3<0$ mais :

$$z=-3\left(\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{11}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}\right)=3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)\right).$$

Le complexe z a donc pour module 3 et pour argument $\pi+\frac{\pi}{11}$ ou plutôt $-\frac{10}{11}\pi$.

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

<u>Démonstrations</u> :

PROPRIÉTÉS

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- **Produit :** $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$
- **Puissance :** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$
- **Quotient :** $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

Démonstrations :

• On note $\alpha_1=\arg(z)$ et $\alpha_2=\arg(z')$.

On a donc : $z=|z|(\cos\alpha_1+\mathrm{i}\sin\alpha_1)$ et $z'=|z'|(\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_2)$.

Alors : $zz' = |z|(\cos\alpha_1+\mathrm{i}\sin\alpha_1) \times |z'|(\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_2)$

$= |z||z'|(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}(\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\sin\alpha_1\cos\alpha_2))$

Or : $\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2=\cos(\alpha_1+\alpha_2)$ et $\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\sin\alpha_1\cos\alpha_2=\sin(\alpha_1+\alpha_2)$

donc : $zz' = |z||z'|(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+\mathrm{i}\sin(\alpha_1+\alpha_2))$.

Or, $|z||z'|\geqslant 0$, donc cette écriture est bien la forme trigonométrique de zz', d'où :
$|zz'|=|z||z'|$ (mais on le savait déjà) et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$.

• Par récurrence sur *n* en utilisant la propriété du produit ci-dessus.

• On pose $Z=\frac{z}{z'}$. Alors $z=Zz'$ et $\arg(z)=\arg(Z)+\arg(z')$.

D'où : $\arg(Z)=\arg(z)-\arg(z')$ c'est-à-dire $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, et inversement ?

• ***De la forme algébrique à la forme trigonométrique*** : on a $z=a+\mathrm{i}b$.

On calcule le module $|z|$. On écrit alors $z=|z|\left(\frac{a}{|z|}+\mathrm{i}\frac{b}{|z|}\right)$.

On cherche alors θ tel que $\cos\theta=\frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta=\frac{b}{|z|}$. Ce sera l'argument de z.

• ***De la forme trigonométrique à la forme algébrique*** : on a $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ où $\theta=\arg(z)$.

Il suffit de développer et on retrouve la forme algébrique : $z=|z|\cos\theta+\mathrm{i}|z|\sin\theta$.

Exemples C3 et C4

Mettre sous forme trigonométrique les complexes $z_1=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=2-2\mathrm{i}$.

III. Notation exponentielle

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction : $\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \cos t + \mathrm{i}\sin t \end{array}$.

Alors : $f(t+t')=f(t)f(t')$ et $f(0)=1$.

Autrement dit, la fonction f vérifie l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle.

<u>Démonstration</u> :

D’où l’intérêt d’introduire une nouvelle notation, en lien avec la forme trigonométrique :

DÉFINITION (FORME EXPONENTIELLE)

Pour tout réel θ, on note : $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

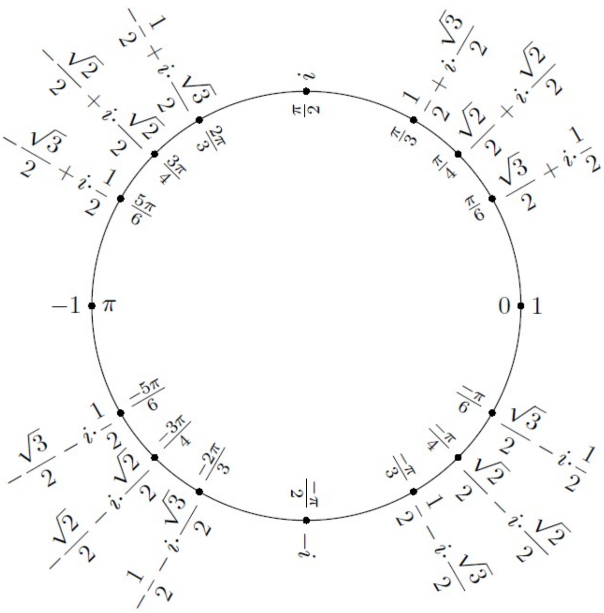
On a alors : tout nombre complexe de module r et d'argument θ s’écrit $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

<u>Remarque</u> : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=$

Plus jolie encore, en écrivant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$, on fait apparaître les 5 grandes constantes des mathématiques.

$\mathrm{e}\approx 2{,}71828183$ $\quad$ $\mathrm{i}^2=-1$ $\quad$ $\pi\approx 3{,}14159265$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$$



Source : chingatome.net

PROPRIÉTÉ (FORMULE DE MOIVRE)

$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z} :\ \cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)=(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^n$.

Démonstration :

PROPRIÉTÉ (FORMULES D'EULER)

$\forall\,\theta \in \mathbb{R} :\ \cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration :

IV. Applications en géométrie

PROPRIÉTÉS

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$
- $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=r\,e^{i\theta} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})=\theta\ \ [2\pi]$ et $\dfrac{CD}{AB}=r$

Démonstrations :

Exemples d'utilisation en géométrie

On considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. On note a, b, c et d les affixes respectives de ces points.
Les théorèmes précédents permettent en particulier d'étudier des configurations géométriques.

- **Alignement de trois points**

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

- **Parallélisme de deux droites**

(AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$.

- **Orthogonalité de deux droites**

(AB) et (CD) sont orthogonales $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

- **Caractérisation de triangles**

\- Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

\- Le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ ou } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

V. L'imaginaire à la puissance imaginaire

Une identité magnifique :

$$\boxed{i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

soit : $i^i \approx 0{,}207\,879\,576\,350\,761\,908\,546\,955\,619\,834$

Démonstration : $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$

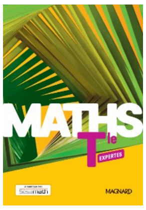
donc $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = i^i$

c'est-à-dire $e^{i^2\frac{\pi}{2}} = i^i$

c'est-à-dire $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$.

→ BILAN DU CHAPITRE & TRAVAIL EN AUTONOMIE ←

voir aussi lls.fr/MXPfiche2



- Fiche bilan → p.69
- QCM 7 questions corrigées → p.70
- Exercices corrigés → 131 à 139 p.71
- Exercice type corrigé → méthodes 9 et 10 p.59