Exercice n°77 : résoudre l'équation diophantienne 255x - 141y = -260.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 255 et 141 :

(1)	255	=	141	×	1	+	114
(2)	141	=	114	×	1	+	27
(3)	114	=	27	×	4	+	6
(4)	27	=	6	×	4	+	3
(5)	6	=	3	×	2	+	0

donc PGCD(255, 141) = 3.

• 260 = 3 × 86 + 2 donc 3 ne divise pas 260
donc l'équation diophantienne 255x - 141y = -260 n'admet pas de solutions.

Exercice n°78 : résoudre l'équation diophantienne 80x - 466y = 354.

CORRECTION

• Algorithme d'Euclide pour 466 et 80 :

(1)	466	=	80	×	5	+	66
(2)	80	=	66	×	1	+	14
(3)	66	=	14	×	4	+	10
(4)	14	=	10	×	1	+	4
(5)	10	=	4	×	2	+	2
(6)	4	=	2	×	2	+	0

donc PGCD(80, 466) = 2.
En divisant par PGCD(80, 466) : 80x - 466y = 354 ⇔ 40x - 233y = 177.

• Recherche d'une solution particulière
Algorithme d'Euclide pour 40 et 233 :

(1)	233	=	40	×	5	+	33
(2)	40	=	33	×	1	+	7
(3)	33	=	7	×	4	+	5
(4)	7	=	5	×	1	+	2
(5)	5	=	2	×	2	+	1
(6)	2	=	1	×	2	+	0

On remonte l'algorithme d'Euclide :

(5)	1	=	5	x	1	+	2 × (-2)
(4)	1	=	5	x	1	+	(7-5x1) × (-2)
	1	=	7	x	(-2)	+	5 x 3
(3)	1	=	7	x	-2	+	(33-7x4) × 3
	1	=	33	x	3	+	7 x (-14)
(2)	1	=	33	x	3	+	(40-33x1) × (-14)
	1	=	40	x	(-14)	+	33 x 17
(1)	1	=	40	x	-14	+	(233-40x5) × 17
	1	=	233	x	17	+	40 x (-99)

On a donc : 40 × (-99) + 233 × 17 = 1
puis en multipliant par 177 : 40 × (-17523) - 233 × (-3009) = 177.

• Si x et y sont solutions de l'équation 40x - 233y = 177 :
40x - 233y = 177 et 40 × (-17523) - 233 × (-3009) = 177
donc, par soustraction : 40(x + 17523) - 233(y + 3009) = 0
donc 40(x + 17523) = -233(-3009 - y). (*)
Or, 40 et -233 sont premiers entre eux
donc, d'après le théorème de Gauss : 40 | -3009 - y
donc il existe un entier relatif k tel que -3009 - y = 40k
et alors, d'après (*): x + 17523 = -233k.

• Réciproquement, si x = -17523 - 233k et y = -3009 - 40k alors :
40x - 233y = 40(-17523 - 233k) - 233(-3009 - 40k) = ... (à faire) = 177.

• Conclusion : les solutions de l'équation 80x - 466y = 354 sont les couples
(-17523 - 233k, -3009 - 40k), où k entier relatif.