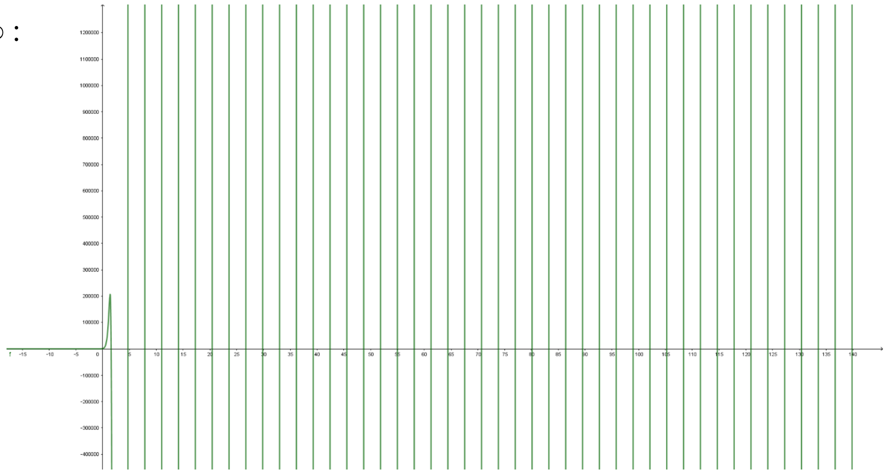
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\cos(x)\mathrm{e}^{5x+7}$.

En $-\infty$, la limite est plus simple (encadrement puis théorème des gendarmes) : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$.

En $+\infty$:



On conjecture donc que h n'admet pas de limite en $+\infty$. Pour le démontrer, on va procéder par disjonction de cas : soit h admet une limite réelle ou infinie, soit h n'admet pas de limite.

→ **PARTIE 1 : pas de limite réelle**

Démonstration n°1 (par l'absurde en admettant que cos n'admet pas de limite en $+\infty$)

Supposons par l'absurde que h admette une limite réelle, notée l.

On peut alors démontrer facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{\mathrm{e}^{5x+7}}=0$.

Or : $\dfrac{h(x)}{\mathrm{e}^{5x+7}}=\cos(x)$ et $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Conclusion : h n'admet pas de limite réelle.

Démonstration n°2

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ signifie qu'il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les réels $h(x)$ dès que x est assez grand[1].

Dire que h n'admet pas de limite réelle en $+\infty$ signifie donc que pour tout réel l, il existe un intervalle ouvert contenant l qui ne contient pas au moins un réel $h(x)$ dès que x est assez grand[2].

Soit l un réel. On peut facilement démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{5x+7}=+\infty$: on en déduit qu'il existe un réel λ tel que, dès que $x>\lambda$, $\mathrm{e}^{5x+7}>l+1$.

Notons x_0 le premier réel[3] tel que $x_0>\lambda$ et $\cos(x_0)=1$.

Alors : $h(x_0)=\mathrm{e}^{5x_0+7}$ d'où $h(x_0)>l+1$. On a alors : $h(x_0)\notin \left]l-\dfrac{1}{2};l+\dfrac{1}{2}\right[$. Ce qu'il fallait démontrer.

1 Définition plus rigoureuse : $\exists l\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0, \exists\lambda>0, x>\lambda \Rightarrow |h(x)-l|<\varepsilon$.
2 Définition plus rigoureuse : $\forall l\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, \forall\lambda>0, \exists x>\lambda, |h(x)-l|\geqslant\varepsilon$.
3 Ce réel existe car cos est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

→ **PARTIE 2 : pas + ∞**

Démonstration n°1 (par l'absurde)

Supposons par l'absurde que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\pi + \dfrac{\pi}{2} = +\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} h\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = +\infty$. (*)

Or, pour tout entier naturel n : $\cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(n\pi)$ ← à démontrer par récurrence[4]

et[5] $\sin(n\pi) = 0$

d'où $\cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et par conséquent $h\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. (**)

Il y a donc contradiction entre (*) et (**).

Conclusion : h n'admet pas de limite égale à + ∞.

Démonstration n°2

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ signifie que pour tout réel A, $]A\,;+\infty[$ contient tous les réels $h(x)$ dès que x est assez grand[6]. Autrement dit : pour tout réel A, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $h(x) > A$ dès que $x > \lambda$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) \neq +\infty$ signifie donc[7] qu'il existe un réel A tel que, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel $x > \lambda$ tel que $h(x) \leqslant A$.

Démontrons-le avec $A = 0$: en effet, on conjecture facilement graphiquement qu'on pourra toujours trouver un réel $x > 0$ tel que $h(x) \leqslant 0$ … On doit donc démontrer que pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel $x > \lambda$ tel que $h(x) \leqslant 0$: soit λ un réel strictement positif.

Si $\cos(\lambda) < 0$ alors on pose $x = \lambda + 2\pi$.

On a alors : $x > \lambda$ et $\cos(x) = \cos(\lambda)$ d'où $\cos(x) < 0$ d'où $\cos(x)\mathrm{e}^{-5x+7} < 0$ *ie* $h(x) < 0$.

Si $\cos(\lambda) \geqslant 0$ alors on pose $x = \lambda + \pi$.

On a alors : $\cos(x) = -\cos(\lambda)$ d'où $\cos(x) \leqslant 0$ d'où $\cos(x)\mathrm{e}^{-5x+7} \leqslant 0$ *ie* $h(x) \leqslant 0$.

→ **PARTIE 3 : pas – ∞**

Démonstrations analogues à la partie 2.

---

4 Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

5 Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

6 Définition plus rigoureuse : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0, x > \lambda \Rightarrow h(x) > A$.

7 Définition plus rigoureuse : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall \lambda > 0, \exists x > \lambda, h(x) \leqslant A$.