

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUESDurée : 30 minutes. Calculatrice AUTORISÉE en mode examen.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. Construire un arbre pondéré qui décrit la situation ci-dessus.
2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Déterminer la probabilité qu'elle ait contracté la grippe.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront éventuellement approchées à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, elle interroge au hasard 40 habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à 40 tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

1. a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b) On constate que 29 personnes ne sont pas vaccinées parmi les 40 interrogées.

Quelle était la probabilité que cela se produise ? Selon vous, que peut-on en déduire ?

2. Un nouveau sondage est effectué : 3 750 habitants de la ville sont interrogés. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées.

a) Calculer l'espérance mathématique de Y et donner une interprétation de ce résultat.

b) On analyse les résultats du sondage : 1453 personnes ont déclaré être vaccinées.

Calculer les probabilités suivantes : $p(Y=1453)$; $p(Y \leq 1453)$; $p(1450 \leq Y \leq 1550)$.

Que pourriez-vous conclure ?

c) Déterminer, en expliquant rapidement votre démarche, le plus petit entier a tel que $p(Y \leq a) \geq 0,9$.