

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUESDurée : 55 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.**EXERCICE 1**

≈ 5 minutes

Déterminer l'ensemble des diviseurs naturels de 1638, noté D_{1638} .**EXERCICE 2**

≈ 5 minutes

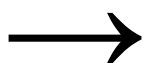
Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que : $2n+1 \mid 6n-3$.**EXERCICE 3**

≈ 5 minutes

Démontrer que $3^3 \equiv 1 [13]$.En déduire que $3^{12111985} \equiv 3 [13]$.**EXERCICE 4**

≈ 5 minutes

Écrire la division euclidienne de 658 par 219.

En déduire la division euclidienne de -658 par 219, puis celle de -658 par -219 .

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année 2012+n.

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0 .

b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{15\,000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n .

c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n = \frac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

► Décrire l'évolution des deux populations.

Variations et convergences éventuelles.