Nom : **Prénom** : **Classe** : T^{le}OME

le 17 / 11 / 2021

Note :

INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 55 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE en mode examen**.

EXERCICE 1 ≈ 5 minutes

Déterminer l'ensemble des diviseurs naturels de 1638, noté $D_{1\,638}$.

EXERCICE 2 ≈ 5 minutes

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs *n* tels que : $2n+1 \mid 6n-3$.

EXERCICE 3 ≈ 5 minutes

Démontrer que $3^3 \equiv 1$ [13].
En déduire que $3^{12\,111985} \equiv 3$ [13].

EXERCICE 4 ≈ 5 minutes

Écrire la division euclidienne de 658 par 219.
En déduire la division euclidienne de -658 par 219, puis celle de -658 par -219 .

→

EXERCICE 5 ≈ 30 minutes

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1^{er} juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.
On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1^{er} juillet de l'année $2012+n$.

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1.a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1^{er} juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.
On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\[2ex] v_n = \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

▶ Décrire l'évolution des deux populations.

Variations et convergences éventuelles.