Nom : **Prénom** : **Classe** : T[le]SM

le 09 / 11 / 2022

Note :

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

EXERCICE 1 env. 15 min

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

On définit les points E, F et G par : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Faire de même pour $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$.

2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

EXERCICE 2 env. 15 min

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace non coplanaires.

On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [AD].

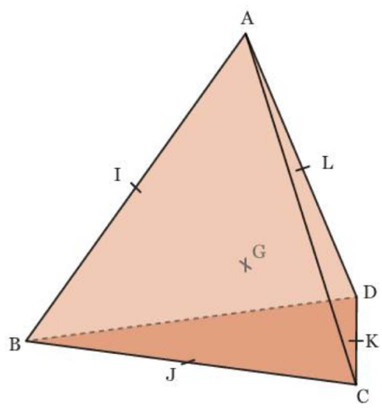
On note G le milieu de [IK] et Ω le point défini par $\overrightarrow{\Omega B}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$.

1. On admet que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AK}$

En déduire que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$.

2. On admet que : $\overrightarrow{\Omega A}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

En déduire que Ω, A et G sont alignés.



EXERCICE 3 env. 15 min

On note (w_n) la suite définie sur ℕ par : $w_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}\neq 0$.

2. a. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$.

b. En déduire que (w_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 env. 15 min

On définit la suite (u_n) par $u_1=1$ et, pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1}=\dfrac{n}{2(n+1)}u_n+\dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 3.