On note α un réel, + ∞ ou – ∞. On note g une fonction ne s'annulant pas au voisinage de α.

Si $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)-g(x)=0$?

Non. Contre-exemple : $\alpha=+\infty$, $f(x)=x+1$ et $g(x)=x$.

En effet : $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ donc, par quotient et somme de limites, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

mais $f(x)-g(x)=1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)\neq 0$.

On note α un réel, + ∞ ou – ∞. On note g une fonction ne s'annulant pas au voisinage de α.

Si $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)$?

Supposons que $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

→ 1er cas : *g* converge en α vers un réel noté *l*

Alors, par produit de limites, $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=l$ *ie* $\lim_{x\to\alpha} f(x)=l$. D'où : $\boxed{\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)}$.

→ 2ème cas : *g* diverge en α vers + ∞

Alors, par produit de limites, $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=+\infty$ *ie* $\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$. D'où : $\boxed{\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)}$.

→ 3ème cas : *g* diverge en α vers – ∞

Alors, par produit de limites, $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=-\infty$ *ie* $\lim_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$. D'où : $\boxed{\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)}$.

→ 4ème cas : *g* n'admet aucune limite en α (*)

$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ donc $]0{,}9;1{,}1[$ contient tous les $\frac{f(x)}{g(x)}$ dès que x est assez proche de α (notons E l'ensemble correspondant). Par conséquent, f ne s'annule pas sur E et l'on peut considérer $\frac{g}{f}$ lorsque « x tend vers α ».

Puisque $\frac{g}{f}=\frac{1}{\frac{f}{g}}$, par quotient de limites : $\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

→ Par l'absurde, supposons que *f* converge vers un réel *m*.

Alors, par produit de limites : $\lim_{x \to \alpha} \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) = m$ *ie* $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$. Cela contredit (*).

Donc <u>*f* ne converge pas en α vers un réel</u>.

→ Par l'absurde, supposons que *f* diverge vers $\pm\infty$.

Alors, par produit de limites : $\lim_{x \to \alpha} \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) = \pm\infty$ *ie* $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \pm\infty$. Cela contredit (*).

Donc <u>*f* ne diverge pas en α vers ± ∞</u>.

Conclusion : *f* n'admet aucune limite en α.