Nom : .... **Prénom** : ....

→ RENDRE TOUT LE SUJET ←
→ AVEC VOTRE COPIE ←

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
« BLANC »

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points]

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0=1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}9u_n+0{,}25$.

3. a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace() :
      u = 1
      n = 0
      while ________ :
            u = ________
            n = n+1
      return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=2{,}5-u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=2{,}5-1{,}5\times 0{,}9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

EXERCICE 2 [4 points]

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question, la lettre de la réponse choisie et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Pour tout réel x, l'expression $2+\dfrac{3\,\mathrm{e}^{-x}-5}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ est égale à :

A. $\dfrac{5-3\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$ **B.** $\dfrac{5+3\,\mathrm{e}^{x}}{1-\mathrm{e}^{x}}$ **C.** $\dfrac{5+3\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$ **D.** $\dfrac{5-3\,\mathrm{e}^{x}}{1-\mathrm{e}^{x}}$

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2 g(x)$, où g est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $g'(x)=\dfrac{1}{x}$. Parmi les quatre fonctions F ci-dessous, laquelle vérifie $\mathrm{F}'=f$?

A. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}x^2$

B. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}x^3(g(x)-1)$

C. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}x^3\left(g(x)-\dfrac{1}{3}\right)$

D. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}x^2(g(x)-1)$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$. La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

A. $x=2$ **B.** $y=2$ **C.** $y=0$ **D.** $x=-1$

4. On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique. On désigne par f'' la dérivée seconde de f.

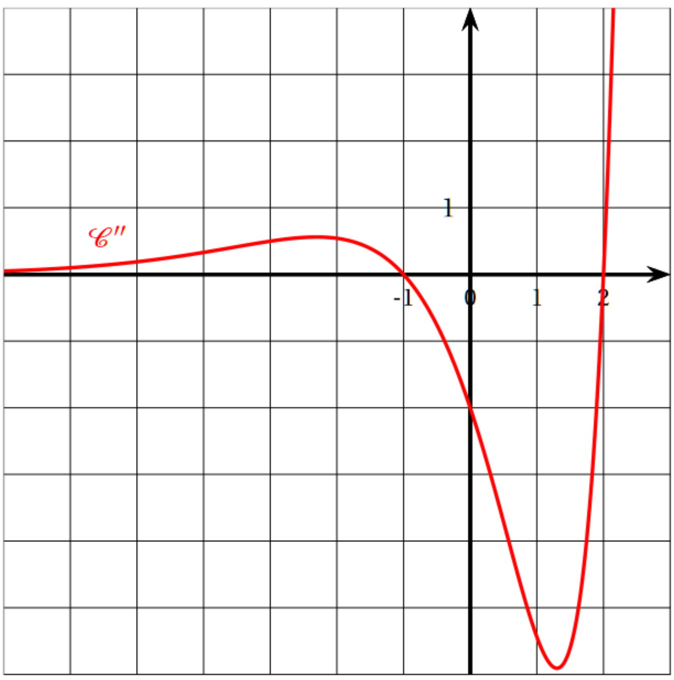
On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe de

A. $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion

B. f est convexe sur l'intervalle $[-1;2]$

C. f est convexe sur $]-\infty;-1]$ et sur $[2;+\infty[$

D. f est convexe sur $\mathbb{R}$.



EXERCICE 3 [6 points]

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3;4]$ par : $p(x)=x^3-3x^2+5x+1$.

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3;4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x)=0$ admet dans l'intervalle $[-3;4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près. Justifier rapidement.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3;4]$.

Partie B

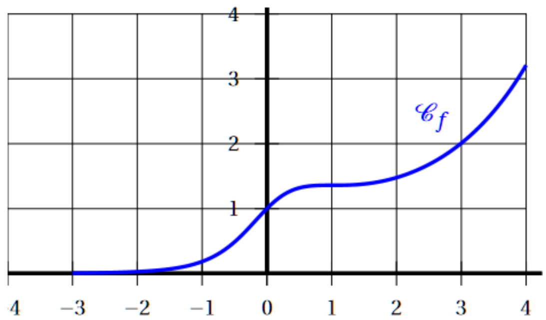
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3;4]$ par : $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

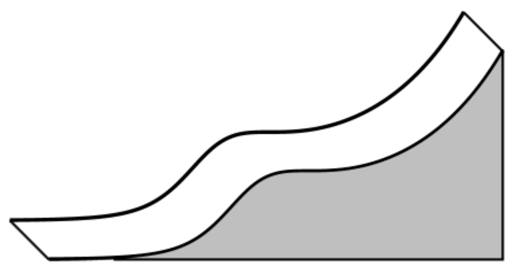
1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3;4]$.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3;4]$: $f''(x)=\frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ».

EXERCICE 4 [5 points]

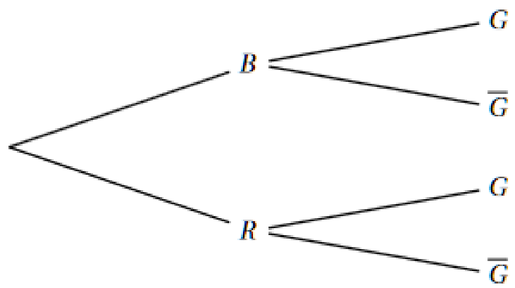
Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5. Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante : si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ; si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac. Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $p_B(G)$.

b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.

Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. a. Montrer que $p(G)=0,4$.

b. Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $p(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près. Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Déterminer p_n.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99. Expliquer rapidement votre démarche.