BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1 [5 points]

1. Après 30 minutes, 10 % de 1 mg ont été éliminés ; il en reste donc 0,9 mg. On donne alors 0,25 mg supplémentaires : la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure est donc 1,15 mg.

2. D'après l'énoncé, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse. D'où, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\left(1-\frac{10}{100}\right)u_n+0{,}25$ *ie* $u_{n+1}=0{,}9u_n+0{,}25$.

3. a. Initialisation : $1\leqslant 1{,}15<5$ d'où $u_0\leqslant u_1<5$.

Hérédité : soit n un entier naturel. Supposons que $u_n\leqslant u_{n+1}<5$.

Alors : $0{,}9u_n\leqslant 0{,}9u_{n+1}<0{,}9\times 5$

donc $0{,}9u_n+0{,}25\leqslant 0{,}9u_{n+1}+0{,}25<0{,}9\times 5+0{,}25$

ie $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}<4{,}75$

d'où $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}<5$.

Conclusion : …

b. (u_n) est donc strictement croissante et majorée par 5 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est donc convergente.

4. a.

```
def efficace() :
      u = 1
      n = 0
      while u<1,8 :
            u = 0,9*u+0,25
            n = n+1
      return n
```

b. Le script renvoie : 8 (car $u_8\approx 1{,}854$). Interprétation : le médicament commence à être réellement efficace au bout de 8 périodes de 30 min, c'est-à-dire après 4 heures.

5. a. $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=2{,}5-u_{n+1}=2{,}5-(0{,}9u_n+0{,}25)=2{,}5-0{,}9u_n-0{,}25=2{,}25-0{,}9u_n=0{,}9\times 2{,}5-0{,}9u_n=0{,}9(2{,}5-u_n)$ d'où $v_{n+1}=0{,}9v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de premier terme v_0 avec $v_0=2{,}5-u_0=1{,}5$.

b. Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times 0{,}9^n$ donc $2{,}5-u_n=1{,}5\times 0{,}9^n$ d'où $u_n=2{,}5-1{,}5\times 0{,}9^n$.

c. $-1<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}9^n=0$. D'où, par produit et somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2{,}5$.

La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 2{,}5$.

Par conséquent, d'après le modèle choisi, le traitement ne présente pas un risque pour le patient.

EXERCICE 2 [4 points]

1. Réponse **A** : $\dfrac{5-3\,e^x}{1+e^x}$.

2. Réponse **C** : $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\left(g(x)-\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Réponse **B** : $y=2$.

4. Réponse **C** : f est convexe sur $]-\infty;-1]$ et sur $[2;+\infty[$.

EXERCICE 3 [6 points]

Partie A

1. $p'(x)=3x^2-6x+5$

Discriminant de $p'(x)$: $\Delta=(-6)^2-4\times3\times5=-24$.

$\Delta<0$ donc $p'(x)$ n'admet pas de racine réelle et, puisque $3>0$: $p'(x)>0$ sur $[-3;4]$.

La fonction p est donc strictement croissante sur $[-3;4]$.

2.
- p est dérivable sur $[-3;4]$ donc continue sur $[-3;4]$
- p est strictement croissante sur $[-3;4]$
- $p(-3)=...=-68$ et $p(4)=...=37$ et $-68<0<37$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $p(x)=0$ admet dans l'intervalle $[-3;4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. On utilise la calculatrice et la méthode par balayage :

$p(-1)<0<p(0)$ puis $p(-0{,}2)<0<p(-0{,}1)$ puis $p(-0{,}18)<0<p(-0{,}17)$.

Donc une valeur approchée de α au centième près est : $\alpha\approx-0{,}18$.

4.

x	-3 α 4
$p(x)$	$-$ 0 $+$

Partie B

1. a. On pose : $u(x)=e^x$ $v(x)=1+x^2$. Alors : $u'(x)=e^x$ $v'(x)=2x$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec u et v qui sont dérivables sur $[-3;4]$ et v qui ne s'annule pas sur $[-3;4]$ (un carré est toujours positif) donc f' est dérivable sur $[-3;4]$ et :

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x^2)-e^x\times2x}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} \text{ } ie \text{ } f'(x)=\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

b. $f'(1)=...=0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Pour tout réel x de $[-3;4]$: $e^x>0$ et $(1+x^2)^3>0$ (car un carré est toujours positif et la fonction cube est strictement croissante sur $[1;+\infty[$).

x	-3 α 1 4
$p(x)$	$-$ 0 $+$ ⋮ $+$
$x-1$	$-$ ⋮ $-$ 0 $+$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

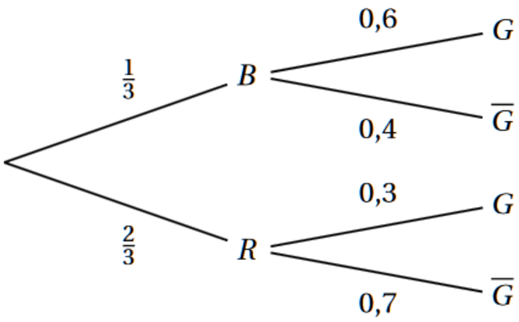
On en déduit que f admet deux points d'inflexion, d'abscisses α et 1.

Selon le critère des concepteurs, le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 4 [5 points]

1. a. D'après l'énoncé : $p_B(G)=\frac{3}{5}$.

b.



$p(B)=\frac{4}{4+8}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ $\quad$ $p(R)=1-p(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$p_B(\overline{G})=1-p_B(G)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=0,4$

D'après l'énoncé de la question 1.b. : $p_R(G)=0,3$.

D'où : $p_R(\overline{G})=1-p_R(G)=1-0,3=0,7$.

2. a.

$$\begin{aligned} p(G) &= p(B\cap G)+p(R\cap G) \\ &= p(B)\times p_B(G)+p(R)\times p_R(G) \\ &= \frac{1}{3}\times 0,6+\frac{2}{3}\times 0,3 \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

d'où $p(G)=0,4$.

b. $p_G(B)=\frac{p(B\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0,6}{0,4}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$ donc la probabilité qu'un joueur ait obtenu une case blanche en lançant la roue, sachant qu'il gagne la partie, est de 0,5.

3. $p(B\cap G)=p(B)\times p_B(G)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ et $p(B)\times p(G)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

donc $p(B\cap G)\neq p(B)\times p(G)$ donc B et G ne sont pas indépendants.

4. a. On répète 10 fois une épreuve de Bernoulli de succès l'événement G (probabilité de succès : 0,4), de manière identique et indépendante (« les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie »).

On obtient donc un schéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

b. $p(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,4^3\times(1-0,4)^{10-3}\approx 0,215$ donc la probabilité que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées est d'environ 0,215.

c. $p(X\geqslant 4)=\sum_{k=4}^{10}\binom{10}{k}\times 0,4^k\times(1-0,4)^{10-k}$

D'après la calculatrice : $p(X\geqslant 4)\approx 0,618$.

La probabilité que le joueur gagne au moins quatre parties sur les dix parties jouées est d'environ 0,618.

5. a. En notant Y la loi binomiale de paramètres n et 0,4 :

$$p_n=p(Y\geqslant 1)=1-p(Y=0)=1-\binom{n}{0}\times 0,4^0\times(1-0,4)^n$$

d'où $p_n=1-0,6^n$.

b. • On peut faire un tableau de valeurs et trouver la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99 : $n=10$.

• On peut aussi résoudre l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}99$ en utilisant la fonction $\ln$, on trouve :

$$p_n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \leqslant n$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \approx 9{,}02$ d'où la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99 : $n=10$.