Nom : **Prénom :** **Classe :** $\mathrm{T^{le}OME}$

le 14 / 02 / 2023

Note :

Devoir de l'amour des mathématiques

Durée : 1 heure. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

EXERCICE 1 ≈ 10 min

On considère une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=x$
- $\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z')=f(z)+f(z')$
- $\forall (z;z') \in \mathbb{C}^2,\ f(zz')=f(z)f(z')$.

1. Démontrer que : $f(\mathrm{i})=\mathrm{i}$ ou $f(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$.

2. On suppose que $f(\mathrm{i})=\mathrm{i}$. Démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z)=z$.

Pour information, on pourrait démontrer qu'en supposant que $f(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$, alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z)=\overline{z}$.

EXERCICE 2 ≈ 15 min

On souhaite résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $3^x+1=5^y+7^z$ d'inconnue $(x;y;z)$, notée (E).

1. Supposons que (E) admette une solution $(a;b;c)$: $3^a+1=5^b+7^c$.

a) En raisonnant modulo 3, démontrer par l'absurde que $a=0$.

b) On a alors : $5^b+7^c=2$. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que : $b=0$ et $c=0$.

Remarque : le contraire de « $b=0$ et $c=0$ » est « $b\geqslant 1$ ou $c\geqslant 1$ » (et on peut distinguer ces deux cas).

2. Conclure <u>rigoureusement</u> quant aux solutions de (E).

EXERCICE 3 ≈ 15 min

Pour cet exercice, on donne les multiples de 17 inférieurs à 100 : 0, 17, 34, 51, 68, 85.

1. Démontrer que : $2\,022^{2022}-1$ est divisible par 17.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Cet entier peut s'écrire sous la forme $10a+b$ où $(a;b)\in \mathbb{N}^2$ et $0\leqslant b\leqslant 9$ (division euclidienne).

a) Démontrer que : $n \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow a-5b \equiv 0\ [17]$.

b) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 17.

c) En déduire, sans calculatrice et en expliquant rapidement votre démarche, les multiples de 17 parmi les entiers suivants : 562 ; 833 ; 1 547 ; 3 601.

$\longrightarrow$

EXERCICE 4 $\approx$ 15 min

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x\,;y)$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x\,;y)$, on note $M_{\vec{u}}$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si A est une matrice carrée d'ordre 2, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan et si $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on note $A(\vec{u})$ le vecteur du plan de coordonnées $(x'\,;y')$.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,(2\,;-1)$ alors $M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et ainsi $A(\vec{u})$ est le vecteur de coordonnées $(4\,;6)$.

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\|A(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Ainsi, une matrice orthogonale est une matrice qui conserve la norme des vecteurs.

Dans toute la suite, lorsqu'on dit qu'une matrice est orthogonale, il est sous-entendu qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Donner un exemple simple de matrice orthogonale.

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{2}}B$.

- **a.** Soit $\vec{u}\,(1\,;0)$. Déterminer les coordonnées de $B(\vec{u})$. La matrice B est-elle orthogonale ?
- **b.** Soit x et y deux réels et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(x\,;y)$.
  Déterminer les coordonnées de $C(\vec{u})$ et en déduire que C est orthogonale.

Source : https://lionelponton.fr