BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1 [5 points]

Partie A

1. $u_1=\dfrac{18}{5}$ et $u_2=\dfrac{599}{180}$.

2. On note : $\mathrm{I}=[\sqrt{11};+\infty[$.

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+11\times\dfrac{1}{x}\right)$

La fonction inverse est dérivable sur I, ainsi que la fonction identité ($x\longmapsto x$).

Donc, par produits et somme de fonctions dérivables sur I, *f* est dérivable sur I.

Pour tout réel *x* de I : $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+11\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ *ie* $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-11}{x^2}\right)$.

Or : $x\geqslant\sqrt{11} \Rightarrow x^2\geqslant 11 \Rightarrow x^2-11\geqslant 0$.

Donc : $\forall\, x\in\mathrm{I},\ f'(x)\geqslant 0$.

La fonction *f* est donc croissante sur I.

3. On note $\mathrm{P}(n)$: « $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$ ».

Initialisation : $u_0\geqslant u_1$ car $5\geqslant\dfrac{18}{5}$ (en effet, $5\times 5\geqslant 18$)

et $u_1\geqslant\sqrt{11}$ car $18^2\geqslant 5^2\times 11$, donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit *n* un entier naturel. Supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie : $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$.

Alors, *f* étant croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$: $f(u_n)\geqslant f(u_{n+1})\geqslant\sqrt{11}$ *ie* $u_{n+1}\geqslant u_{n+2}\geqslant\sqrt{11}$.

Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : …

4. (u_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{11}$: d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est donc convergente vers un réel, noté *a*.

5. *f* est continue sur I (puisqu'elle est dérivable) et à valeurs dans I

donc, par le théorème du point fixe : $f(a)=a$.

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{x}\right)=x \Leftrightarrow x+\frac{11}{x}=2x \Leftrightarrow x^2+11=2x^2 \Leftrightarrow x^2-11=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{11} \text{ ou } x=\sqrt{11}$$

Or, pour tout entier naturel *n*, $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\sqrt{11}$. Donc : $a\geqslant\sqrt{11}$.

Par conséquent : $a=\sqrt{11}$.

Partie B

1. a. D'après l'énoncé : $l_0 \times \mathrm{L}_0 = 11$ (aire du rectangle) avec $\mathrm{L}_0 = 5$. D'où : $l_0 = \frac{11}{5}$ *ie* $l_0 = 2{,}2$.

b. Pour tout entier naturel n, l'aire du rectangle R_n est 11, d'où : $l_n \times \mathrm{L}_n = 11$ puis* $l_n = \frac{11}{\mathrm{L}_n}$.

* $\mathrm{L}_n \neq 0$ car sinon on aurait $0 = 11$

2. Pour tout entier naturel n : $\mathrm{L}_{n+1} = \frac{\mathrm{L}_n + l_n}{2}$ et $l_n = \frac{11}{\mathrm{L}_n}$

d'où $\mathrm{L}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{L}_n + \frac{11}{\mathrm{L}_n}}{2}$ *ie* $\mathrm{L}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{L}_n + \frac{11}{\mathrm{L}_n}\right)$.

Donc la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.

3. Soit un entier naturel n. D'après la question 3. de la partie A : $\mathrm{L}_n \geqslant \sqrt{11}$.

Alors : $\frac{1}{\mathrm{L}_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{11}}$ puis $\frac{11}{\mathrm{L}_n} \leqslant \frac{11}{\sqrt{11}}$ *ie* $l_n \leqslant \sqrt{11}$ (car $\frac{11}{\sqrt{11}} = \frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{11}^2} = \sqrt{11}$).

D'où : $l_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant \mathrm{L}_n$.

4. R_n a des dimensions qui convergent vers $\sqrt{11}$, donc le rectangle R_n « tend » vers un carré de côté $\sqrt{11}$.

5. a. Si l'utilisateur tape heron(3), il obtient comme valeurs de sortie l_3 et L_3 :

– pour l : 3,316606 (la valeur de l_3)

– pour L : 3,316643 (la valeur de L_3).

b. Interprétation : $\sqrt{11}$ est compris entre 3,316606 et 3,316643, soit un encadrement d'amplitude inférieure à 4×10^{-5} (en seulement trois itérations !).

EXERCICE 2 [5 points]

1. Réponse : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$. Justification : $\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2-3} = x\,\mathrm{e}^{x^2-3}$.

2. Réponse : géométrique de raison e^2. Justification : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+3} = \mathrm{e}^{2n+1+2} = \mathrm{e}^{2n+1}\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 u_n$.

3. Réponse : `u<=10000`.

4. Réponse : une suite géométrique de raison 1,2. Justification : $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1{,}2u_n + 72 = 1{,}2(u_n + 60) = 1{,}2v_n$.

5. Réponse : 2. Justification : $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^x(1+x)$; d'où $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-1;+\infty[$; f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$; $f(-1) = -\frac{2}{\mathrm{e}} \approx -0{,}735759$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (produit de limites) et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée) ; en utilisant le corollaire du TVI (f continue car dérivable), on trouve deux solutions à l'équation $f(x) = -\frac{73}{100}$.

EXERCICE 3 [5 points]

Partie A

1. Équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$: $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

2. La fonction *f* semble convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$.

Partie B

1. *f* est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x)=1+\mathrm{e}^{-3x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et $u'(x)=-3\mathrm{e}^{-3x}$ (car $(\mathrm{e}^{w})'=w'\mathrm{e}^{w}$)

donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'=-\frac{u'}{u^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}$ *ie* $f'(x)=\frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}$.

2. Pour tout réel x : $\mathrm{e}^{-3x}>0$ donc $(1+\mathrm{e}^{-3x})^2>0$, d'où $f'(x)>0$.

La fonction *f* est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x}=0$.

Par somme et quotient de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-3x}=+\infty$.

Par somme et quotient de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

4.
- *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$
- *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $0{,}99\in[0;1]$

donc, d'après le corollaire du TVI : l'équation $f(x)=0{,}99$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

Avec la calculatrice, on trouve : $\alpha\approx1{,}532$ (au millième).

Partie C

1. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

Or : $f'(0)=\frac{3\mathrm{e}^0}{(1+\mathrm{e}^0)^2}=\frac{3}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$ et $f(0)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^0}=\frac{1}{2}$

donc l'équation de $\mathcal{T}$ est : $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

2. Pour tout réel x :
- $\mathrm{e}^{-3x}>0$ donc $(1+\mathrm{e}^{-3x})^3>0$
- $\mathrm{e}^{-3x}-1>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x}>\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -3x>0 \Leftrightarrow x<0$

On en déduit que :
- $f''(x)>0$ sur $]-\infty;0[$
- $f''(x)<0$ sur $]0;+\infty[$
- $f''(x)=0$ si, et seulement si, $x=0$.

3. a. D'après la question précédente : $f''(x)\geqslant0$ sur $]-\infty;0]$. La fonction *f* est donc convexe sur $]-\infty;0]$.

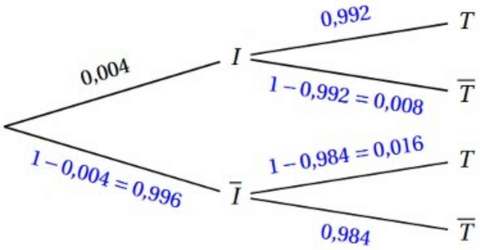
b. La dérivée seconde change de signe uniquement lorsque $x=0$, donc A est le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

c. f est convexe sur $]-\infty;0]$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle, en particulier au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$. De même, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses tangentes sur $[0;+\infty[$, en particulier en dessous de la tangente $\mathscr{T}$.

EXERCICE 4 [5 points]

Partie A

1.



Formulas utilisées :

$p_I(\overline{T})=1-p_I(T)$

$p(\overline{I})=1-p(I)$

$p_{\overline{I}}(T)=1-p_{\overline{I}}(\overline{T})$

2. a. $p(\overline{I}\cap\overline{T})=p(\overline{I})\times p_{\overline{I}}(\overline{T})=0{,}996\times0{,}984$ d'où $p(\overline{I}\cap\overline{T})\approx0{,}980$ (à 10^{-3} près).

b. $p(T)=p(I\cap T)+p(\overline{I}\cap T)=p(T)=p(I)\times p_I(T)+p(\overline{I})\times p_{\overline{I}}(T)=0{,}004\times0{,}992+0{,}996\times0{,}016=0{,}019904$ d'où $p(T)\approx0{,}020$ (à 10^{-3} près).

c. $p_T(I)=\dfrac{p(T\cap I)}{p(T)}=\dfrac{0{,}004\times0{,}992}{0{,}019904}\approx0{,}199$ donc la valeur prédictive positive du test est d'environ 0,199.

d. $p(\overline{I}\cap T)+p(I\cap\overline{T})=0{,}996\times0{,}016+0{,}004\times0{,}008\approx0{,}016$

La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc d'environ 0,016 (à 10^{-3} près).

Partie B

1. a. On répète 100 fois une épreuve de Bernoulli de succès l'événement T (probabilité de succès : 0,02), de manière identique et indépendante (« on assimile ce choix à un tirage avec remise »).
On obtient donc un schéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,02.

b. $p(X=3)=\binom{100}{3}\times0{,}02^3\times(1-0{,}02)^{10-3}\approx0{,}182$ donc la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement trois vaches présentant un test positif est d'environ 0,182.

c. $p(X\leqslant3)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\binom{100}{k}\times0{,}02^k\times(1-0{,}02)^{100-k}\approx0{,}859$ donc la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus trois vaches présentant un test positif est d'environ 0,859.

2. On note Y la loi binomiale de paramètres n et 0,02.
On cherche le plus petit entier naturel n tel que : $p(Y\geqslant1)\geqslant0{,}99$.

$p(Y\geqslant1)\geqslant0{,}99 \Leftrightarrow 1-p(Y=0)\geqslant0{,}99 \Leftrightarrow p(Y=0)\leqslant0{,}01 \Leftrightarrow \binom{n}{0}\times0{,}02^0\times(1-0{,}02)^n\leqslant0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}98^n\leqslant0{,}01.$

Or, la suite $(0{,}98^n)$ est strictement décroissante (car $-1<0{,}98<1$) et : $0{,}98^{227}>0{,}01$ et $0{,}98^{228}<0{,}01$
donc, le plus petit entier naturel n tel que $p(Y\geqslant1)\geqslant0{,}99$ est 228.