Nom : **Prénom** : **Classe** : T$^{\text{le}}$OME

le mardi 9 mai 2023

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 55 minutes. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

Pour chaque question, cocher la ou les bonnes réponses.
Une réponse juste rapporte 1 point, une ***réponse fausse enlève 0,5 point****.*
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

EXERCICE 1 : NOMBRES COMPLEXES (47 %) ≈ 22 minutes

Note :

On se place dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. Le nombre complexe i est égal à :

☐ sa partie imaginaire ☐ sa partie réelle

☐ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ☐ $\arg(3i+7)$

2. $a+ib \neq a'+ib' \Leftrightarrow a\neq a'$ ou $b\neq b'$

☐ Vrai ☐ Faux

3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z+\bar{z} \in \ldots$

☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{C}$ ☐ $\mathbb{R}^*$ ☐ $\mathbb{C}^*$ ☐ $i\mathbb{R}$

4. $\forall (z;z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $\text{Re}(z+z')=\text{Re}(z)+\text{Re}(z')$

☐ Vrai ☐ Faux

5. $\forall (z;z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $\text{Re}(zz')=\text{Re}(z)\times\text{Re}(z')$

☐ Vrai ☐ Faux

6. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z+\bar{z}=0 \Rightarrow z=0$.

☐ Vrai ☐ Faux

7. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

☐ Vrai ☐ Faux

8. $\forall (z;z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $\begin{cases} z+z' \in \mathbb{R} \\ zz' \in \mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow (z;z')\in\mathbb{R}^2$

☐ Vrai ☐ Faux

9. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\geqslant 97 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k=\ldots$

☐ 2^n ☐ 2^n-1 ☐ 2^n-2 ☐ 2^n-2n

☐ 3^n ☐ 3^n-1 ☐ 3^n-2 ☐ 3^n-2n

10. $\sum_{k=0}^{1985}\binom{1985}{k}(-1)^k=\ldots$

☐ -1 ☐ 1985 ☐ 1211 ☐ 0

☐ 1 ☐ -1985 ☐ -1211 ☐ $i^{2023}+i$

11. $\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}=\ldots$

☐ 20 ☐ 21 ☐ 22
☐ 40 ☐ 41 ☐ 42
☐ 31 ☐ 32 ☐ 33
☐ 62 ☐ 63 ☐ 64

12. L'équation z^2-4z+5 a pour ensemble solution dans $\mathbb{C}$:

☐ $\emptyset$ ☐ $\{-2-\mathrm{i};2+\mathrm{i}\}$ ☐ $\{2-\mathrm{i};2+\mathrm{i}\}$ ☐ $\{2-3\mathrm{i};2+3\mathrm{i}\}$

13. Un argument de 0 est 0.

☐ Vrai ☐ Faux

14. $\forall z\in\mathbb{C} : |z|=0 \Leftrightarrow z=0$

☐ Vrai ☐ Faux

15. Le module du nombre complexe $\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$ est égal à :

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $-\frac{5\pi}{3}$ est un argument de $\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ Vrai ☐ Faux

17. Tout réel non nul a pour argument 0.

☐ Vrai ☐ Faux

18. $\sin(a-b)=\ldots$

☐ $\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ ☐ $\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
☐ $\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ ☐ $\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

19. $\dfrac{1}{\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)^2}=\ldots$

☐ $\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ ☐ $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$
☐ $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ ☐ $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$

20. $(1+\mathrm{i})^{72}$ est égal à :

☐ 0 ☐ $1+\mathrm{i}^{72}$ ☐ 2^{18} ☐ 2^{36} ☐ 2^{72} ☐ 2^{144}

21. L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $\arg(z)=\arg(1+\mathrm{i})$ $[2\pi]$ est la droite d'équation $y=x$.

☐ Vrai ☐ Faux

22. Le module du conjugué d'un complexe est le conjugué de son module.

☐ Vrai ☐ Faux

23. Dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points suivants : A d'affixe a ; B d'affixe b ; C d'affixe c.
Un argument de $\dfrac{-c}{c-b}$ est :

☐ $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CO})$ ☐ $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OC})$ ☐ $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CO})$ ☐ $(\overrightarrow{BC};\vec{u})-(\overrightarrow{CO};\vec{u})$

24. $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ est une racine de z^2+z+1 .

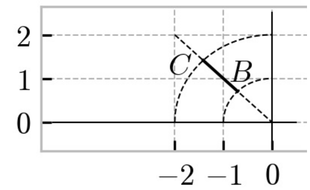
☐ Vrai ☐ Faux

25. Soient U et V les points d'affixes respectives $u=2$ et $v=-2$, dans un repère orthonormé direct.
L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-2|=|z+2|$ est :

☐ l'axe des ordonnées ☐ le cercle de centre U et de rayon 2
☐ l'ensemble {U ; V} ☐ l'ensemble des deux droites d'équations $x=2$ et $x=-2$

26. Dans la figure ci-contre, le segment [BC] correspond à :

☐ $\arg(z)=\dfrac{3\pi}{4}$ et $1<|z|<2$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}<\arg(z)<\pi$ et $1<|z|<2$
☐ $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}<|z|<2\sqrt{2}$ ☐ $\arg(z)=-\dfrac{5\pi}{4}$ et $\sqrt{2}<|z|<2\sqrt{2}$



EXERCICE 2 : ARITHMÉTIQUE (34 %)

≈ 25 minutes

Note :

1. Si 7 | c et 23 | c alors 7×23 | c.

☐ Vrai ☐ Faux

2. Soient a, b et d trois entiers naturels non nuls : ($\exists\ (u;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=d$) ⇒ $d=\text{PGCD}(a;b)$.

☐ Vrai ☐ Faux

3. Si a est divisible par 21 et 56, alors a est divisible par 21×56.

☐ Vrai ☐ Faux

4. Soient a, b deux entiers naturels non nuls : $\text{PGCD}(a;b)=1 \Leftrightarrow$ ($\exists\ (u;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=1$).

☐ Vrai ☐ Faux

5. Si $x\equiv 0$ [8] et $x\equiv 0$ [13] alors $x\equiv 0$ [104].

☐ Vrai ☐ Faux

6. Soient a, b et d trois entiers naturels non nuls : $d=\text{PGCD}(a;b)\Rightarrow$ ($\exists\ (u;v)\in\mathbb{Z}^2,\ au+bv=d$).

☐ Vrai ☐ Faux

7. Soient a, b deux entiers naturels non nuls : si $a=5b+4$ alors 4 est le reste de la division euclidienne de a par b.

☐ Vrai ☐ Faux

8. Soient a, b, m et n quatre entiers relatifs avec $m\geqslant2$ et $n\geqslant2$. Alors : $a\equiv b$ $[mn]\Rightarrow a\equiv b$ $[m]$.

☐ Vrai ☐ Faux

9. L'équation diophantienne $11x-23y=1$ admet pour solution des couples d'entiers relatifs qui :

☐ ne sont jamais premiers entre eux
☐ sont parfois premiers entre eux (donc pas toujours)
☐ sont toujours premiers entre eux

10. Voici comment Alice et Bob font pour s'échanger une clé de cryptographie secrète.
Ils font des actions en parallèle, que l'on décrit dans le tableau suivant :

	Alice	Bob
Étape 1	Alice et Bob choisissent un nombre premier p et un entier a tel que $1 \leqslant a \leqslant p-1$. L'échange n'est pas sécurisé.	
Étape 2	Alice choisit secrètement un nombre x_1 .	Bob choisit secrètement un nombre x_2 .
Étape 3	Alice calcule y_1 tel que : $y_1 \equiv a^{x_1}[p]$.	Bob calcule y_2 tel que : $y_2 \equiv a^{x_2}[p]$.
Étape 4	Alice et Bob s'échangent les valeurs de y_1 et y_2 . L'échange n'est pas sécurisé.	
Étape 5	Alice calcule la clé secrète $y_2^{x_1}[p]$	Bob calcule la clé secrète $y_1^{x_2}[p]$.

☐ $y_1 = y_2$ ☐ $x_1^{y_2} \equiv x_2^{y_1}[p]$ ☐ $y_2^{x_1} \equiv y_1^{x_2}[p]$ ☐ $y_1^{x_2} \equiv y_2^{x_1}[p]$

11. Soit (E) l'équation diophantienne $29x + 15y = 59$, et $(x_0 ; y_0)$ une solution de (E).
☐ $(-15;30)$ est une solution de (E) ☐ x_0 et y_0 sont de parité différente
☐ on peut avoir $x_0 + y_0 = 3$

12. Soient a et b deux entiers naturel. Si $b \mid a^n$, alors $b \mid a$.
☐ Vrai ☐ Faux

13. $5^{10} \equiv \ldots [11]$
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

14. $5^{10^5} \equiv \ldots [11]$
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

15. $10^{5^{10}} \equiv \ldots [11]$
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

16. Soit n un entier naturel non nul. $\mathrm{PGCD}(3n+2 ; 2n+1) = \ldots$
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ on ne peut pas savoir

17. Il existe au moins un entier relatif n tel que $\dfrac{n-6}{15}$ et $\dfrac{n-5}{12}$ soient des entiers relatifs.
☐ Vrai ☐ Faux

18. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Si $29 \mid ab$, alors $29 \mid a$ ou $29 \mid b$.
☐ Vrai ☐ Faux

19. L'inverse de 15 modulo 14 est :
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7
☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ n'existe pas

20. L'inverse de 15 modulo 12 est :

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7
☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ n'existe pas

EXERCICE 3 : MATRICES ET GRAPHES (19 %) ≈ 7 minutes

Note :

1. Une matrice identité est nécessairement carrée.

☐ Vrai ☐ Faux

2. S'il existe un entier naturel *n* tel que $n \geqslant 2$ et $A^n = 0$, alors A est la matrice nulle.

☐ Vrai ☐ Faux

3. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-z=-3 \\ x-y+3z=17 \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y\,;z)$ a pour solution :

☐ $(0\,;1\,;4)$ ☐ $(2\,;-4\,;7)$ ☐ $(1\,;-4\,;4)$ ☐ $(1\,;-1\,;5)$

4. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors : $(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$.

☐ Vrai ☐ Faux

5. Si le système $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y)$ n'a pas de solution, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

☐ Vrai ☐ Faux

6. Si le système $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y)$ admet au moins une solution, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible.

☐ Vrai ☐ Faux

7. Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel non nul *n*, $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 3^n & 0 \end{pmatrix}$.

☐ Vrai ☐ Faux

8. Soient A et B deux matrices inversibles. Alors AB est inversible et son inverse est :

☐ $(AB)^{-1}$ ☐ $A^{-1}B^{-1}$ ☐ $B^{-1}A^{-1}$ ☐ $(BA)^{-1}$

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sachant que $A^2 - 5\,A + 4\,I_3 = 0$:

☐ A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 5\,I_3)$ ☐ A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

☐ A est inversible et $A^{-1} = 5\,A - 4\,I_3$ ☐ A n'est pas inversible

10. La matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

☐ Vrai ☐ Faux