Nom : **Prénom** : **Classe** : $\mathrm{T^{le}}$OME

`le mardi 16 mai 2023`

ÉVALUATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure 15 minutes. Calculatrice **NON AUTORISÉE**.

ATTENTION

Pour chaque question, cocher la ou les bonnes réponses.
*Une réponse juste rapporte 1 point, une **réponse fausse enlève 0,5 point**.*
L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
« ○ » devant le numéro d'une question indique qu'une seule réponse doit être cochée.

EXERCICE 1 : NOMBRES COMPLEXES

≈ 30 minutes

On se place dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Note :

1. La partie réelle du nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égale à :

A. celle de son conjugué **B.** sa partie imaginaire

C. celle du nombre $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ **D.** celle de son inverse

2. $\left|\dfrac{4+3i}{1-2i}\right| = \dots$ **A.** $\sqrt{5}$ **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{|4+3i|}{|1+2i|}$

○**3.** $a+ib \neq a'+ib' \Leftrightarrow a \neq a'$ et $b \neq b'$

○ Vrai ○ Faux

○**4.** Quels que soient les nombres complexes y et z, $|y+z| \geqslant |y|+|z|$.

○ Vrai ○ Faux

5. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z-\bar{z} \in \dots$ **A.** $\mathbb{R}$ **B.** $\mathbb{C}$ **C.** $\mathbb{C}^*$ **D.** $i\mathbb{R}$

○**6.** $\forall (z;z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$

○ Vrai ○ Faux

○**7.** Pour tout nombre complexe z : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z=-\bar{z}$

○ Vrai ○ Faux

8. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}5^k = \dots$

A. 5^n **B.** 5^n-1 **C.** 5^n-11 **D.** 5^n-5n-1

E. 6^n **F.** 6^n-1 **G.** 6^n-11 **H.** 6^n-5n-1

○**9.** $(-1)\times\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k} = \dots$ ○ 0 ○ -16 ○ -15 ○ -4 ○ 15 ○ 16

○**10.** L'équation $3z^2-5z+2$ a pour ensemble solution dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

A. $\varnothing$ **B.** $\left\{1;\frac{2}{3}\right\}$ **C.** $\left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$ **D.** $\left\{2;-\frac{1}{3}\right\}$

○**11.** Un argument de 0 est 0.

○ Vrai ○ Faux

○**12.** Un argument du module de -2 est 0.

○ Vrai ○ Faux

○**13.** Le module du nombre complexe $3\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ est égal à :

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** 3

14. Un argument de $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est :

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{2\pi}{3}$ **C.** $\frac{4\pi}{3}$ **D.** $-\frac{8\pi}{3}$

○**15.** Tout réel strictement positif a pour argument 0.

○ Vrai ○ Faux

○**16.** $\cos(a+b)=\ldots$

A. $\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ **B.** $\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

C. $\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ **D.** $\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

17. $\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4}=\ldots$

A. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **B.** $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ **D.** $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

18. $(1-i)^{12}$ est égal à : **A.** $1-i^{12}$ **B.** $\sqrt{2}^{12}$ **C.** -2^6 **D.** 2^6 **E.** -64

○**19.** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $\arg(z)=\arg(1+i)\ [\pi]$ est la droite d'équation $y=x$ privée de l'origine du plan.

○ Vrai ○ Faux

20. Soient a, b et c trois complexes non nuls, avec $b\neq c$. Dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points suivants : A d'affixe a ; B d'affixe b ; C d'affixe c.

Un argument de $\frac{b-c}{-b}$ est une mesure (en radians) de l'angle orienté :

A. $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO})$ **B.** $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{CB})$ **C.** $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{BC})$ **D.** $(\overrightarrow{BO};\vec{v})-(\overrightarrow{BC};\vec{v})$

○**21.** L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z+2|=2$ est :

○ un point ○ un cercle ○ l'ensemble vide

○ un plan ○ une droite

22. $\arg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ldots$ **A.** 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\arg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

23. Soit z un nombre complexe non nul.

A. $\arg(-z)=\arg(z)\ [\pi]$ **B.** $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$

EXERCICE 2 : ARITHMÉTIQUE

≈ 35 minutes

Note :

○**1.** Si $21 \mid c$ et $15 \mid c$ alors $21 \times 15 \mid c$.

○ Vrai ○ Faux

○**2.** Soient a, b deux entiers naturels non nuls : $\text{PGCD}(a;b)=1 \Leftrightarrow (\exists\ (u;v) \in \mathbb{Z}^2,\ au+bv=1\ )$.

○ Vrai ○ Faux

○**3.** Si a est divisible par 15 et 26, alors a est divisible par 15×26.

○ Vrai ○ Faux

○**4.** Si $x \equiv 0\ [8]$ et $x \equiv 0\ [13]$ alors $x \equiv 0\ [104]$.

○ Vrai ○ Faux

5. On admet que $62920 = 2^3 \times 5 \times 11^2 \times 13$.

A. 62920 admet moins de 45 diviseurs
B. 88 divise 62920
C. la somme des chiffres du nombre de diviseurs de 62920 est 12
D. 62920 est premier

○**6.** Soient a et b deux entiers naturels non nuls : $\text{PGCD}(a;b)=7 \Rightarrow (\exists\ (u;v) \in \mathbb{Z}^2,\ au+bv=14\ )$.

○ Vrai ○ Faux

○**7.** Si $a = 1\,985\,b + c$ avec b et c deux entiers naturels tels que $0 \leqslant c \leqslant b$, alors c est le reste de la division euclidienne de a par b.

○ Vrai ○ Faux

○**8.** $\forall (c;d;p;q) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $c \equiv d\ [pq] \Rightarrow c \equiv d\ [q]$.

○ Vrai ○ Faux

○**9.** L'équation diophantienne $62x + 32y = 2$ admet pour solution des couples d'entiers relatifs qui :

A. ne sont jamais premiers entre eux
B. sont parfois premiers entre eux (donc pas toujours)
C. sont toujours premiers entre eux

10. Soit (E) l'équation diophantienne $70x + 22y = 48$, et $(x_0; y_0)$ une solution de (E).

A. $(-23;70)$ est une solution de (E)
B. on peut avoir $x_0 + y_0 = 2$
C. on peut avoir $x_0 + y_0 = 0$
D. on peut avoir $x_0 + y_0 = 48$

○**11.** Le produit de deux entiers naturels non nuls impairs est un entier naturel impair.

○ Vrai ○ Faux

○**12.** Soient a et b deux entiers naturels, avec a premier et b non nul. Si $b \mid a^n$, alors $b \mid a$.

○ Vrai ○ Faux

○**13.** Le produit d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair est un entier naturel impair.

○ Vrai ○ Faux

○**14.** $7^{12} \equiv \ldots\ [13]$

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6
○ 7 ○ 8 ○ 9 ○ 10 ○ 11 ○ 12

○**15.** $17^{89}\times 2^3 \equiv \ldots$ [18]

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ 8
○ 9 ○ 10 ○ 11 ○ 12 ○ 13 ○ 14 ○ 15 ○ 16 ○ 17

16. Pour tout entier naturel non nul n, on note : $d_n = \text{PGCD}(5n-3\,;2n+1)$.

A. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, d_n\in\{1\,;11\}$ **B.** $\exists n\in\mathbb{N}, d_n=1$ **C.** $d_5=2$

○**17.** Il existe au moins un entier relatif n tel que $\dfrac{n-6}{20}$ et $\dfrac{n-2}{25}$ soient des entiers relatifs.

○ Vrai ○ Faux

○**18.** $\forall(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $37 \mid ab \Rightarrow (\,37 \mid a$ ou $37 \mid b\,)$.

○ Vrai ○ Faux

○**19.** L'inverse de 12 modulo 8 est :

○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○ 7 ○ n'existe pas

20. On admet que : $13\times 25 = 27\times 12+1$.

A. 25 est un inverse modulaire de 13 modulo 27 **B.** 13 est un inverse modulaire de 25 modulo 12
C. 27 est un inverse modulaire de 12 modulo 13 **D.** 12 est un inverse modulaire de 27 modulo 25

21. Cochez les nombres premiers qui divisent 66^{2023} :

☐ 2 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 11 ☐ 13 ☐ 17 ☐ 19 ☐ 23
☐ 29 ☐ 31 ☐ 37 ☐ 41 ☐ 43 ☐ 47 ☐ 53 ☐ 59 ☐ 61

○**22.** Soient a un entier relatif et $n\in\mathbb{N}^*$: a admet un inverse modulo $n \Leftrightarrow a$ et n sont premiers.

○ Vrai ○ Faux

○**23.** Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $2\leqslant p\leqslant\sqrt{n}$, alors n est premier.

○ Vrai ○ Faux

○**24.** Un entier naturel n supérieur ou égal à 2, qui n'est divisible par aucun nombre premier p strictement inférieur à n, est premier.

○ Vrai ○ Faux

○**25.** Tout entier naturel admet un diviseur premier.

○ Vrai ○ Faux

○**26.** $16^7 \equiv \ldots$ [7]

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6

○**27.** $22^{10} \equiv \ldots$ [11]

○ 0 ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5
○ 6 ○ 7 ○ 8 ○ 9 ○ 10

○**28.** Pour tout entier naturel n, $7^{12n}-1$ est divisible par 10.

○ Vrai ○ Faux

○**29.** Avec $(a\,;b)$ un couple d'entiers naturels : si $ab \equiv 0$ [6] alors $a\equiv 0$ [6] ou $b\equiv 0$ [6].

○ Vrai ○ Faux

EXERCICE 3 : MATRICES ET GRAPHES

≈ 10 minutes

Note :

○**1.** Une matrice identité est nécessairement carrée.

○ Vrai ○ Faux

○**2.** S'il existe un entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A}^n = 0$, alors A est la matrice nulle.

○ Vrai ○ Faux

○**3.** Si le système $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ d\,x + \mathrm{e}\,y = f \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y)$ n'a pas de solution, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ d & \mathrm{e} \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

○ Vrai ○ Faux

○**4.** Si le système $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ d\,x + \mathrm{e}\,y = f \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y)$ admet au moins une solution, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ d & \mathrm{e} \end{pmatrix}$ est inversible.

○ Vrai ○ Faux

○**5.** Si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

○ Vrai ○ Faux

6. Soient A et B deux matrices inversibles. Alors BA est inversible et son inverse est :

A. $(\mathrm{AB})^{-1}$ **B.** $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$ **C.** $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$ **D.** $(\mathrm{B\,A})^{-1}$

7. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -7 & 6 & -7 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Sachant que $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3 = 0$:

A. A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$

B. A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

C. A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} - 1)$

D. A n'est pas inversible

○**8.** La matrice d'adjacence d'un graphe orienté est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

○ Vrai ○ Faux