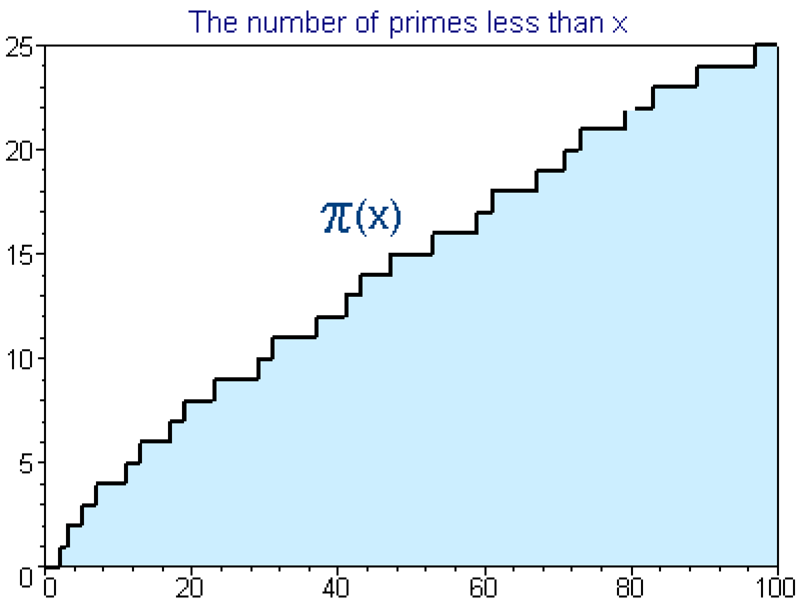
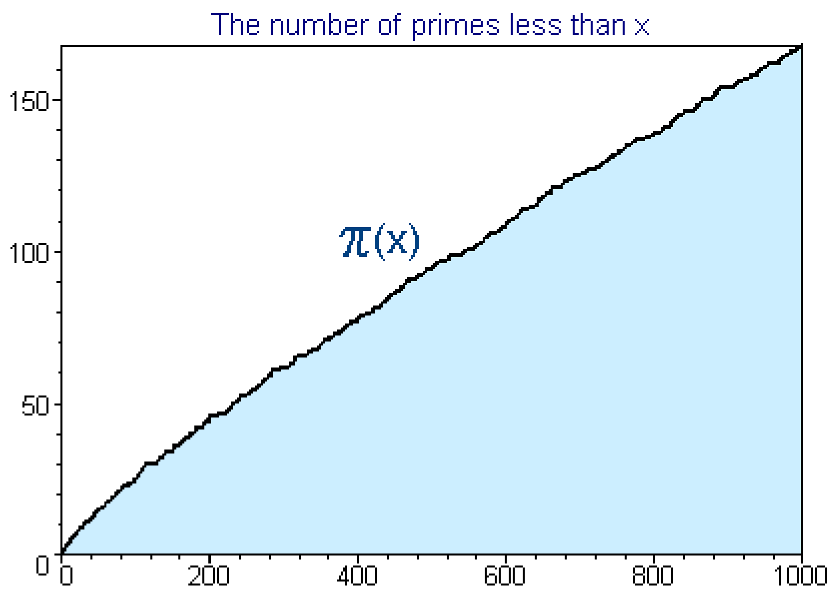
LA RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS

Notions réinvesties : calcul d'intégrale à la calculatrice, fonction ln

Les nombres premiers forment un ensemble infini, soit ! Mais de quelle forme d'infini s'agit-il ?
La proportion de nombres entiers qui sont premiers est-elle constante ?
Ou bien, au contraire, la densité des nombres premiers décroît-elle vers zéro quand on considère des entiers de plus en plus grands ?
Dans l'hypothèse d'une telle raréfaction, à quelle vitesse la densité approche-t-elle de zéro ?
Cette raréfaction est-elle régulière, prévisible, ou a-t-elle des à-coups qui échappent à toute mise en ordre ?

Dans la suite, on notera $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .





A. UNE DENRÉE QUI SE RARÉFIE

Des trous aussi grand que l'on veut

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer qu'il existe un intervalle de taille n sans aucun nombre premier.

Un ensemble de densité limite nulle

Si l'on compte le nombre d'entiers pairs inférieurs à n, on trouve qu'il y en a environ un sur deux (il y en a exactement $\frac{n}{2}$ si n est pair, et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair). Quand n tend vers l'infini, la proportion des nombres pairs parmi les n premiers entiers tend exactement vers $\frac{1}{2}$.

On dit que les nombres pairs ont une « ***densité limite*** » égale à $\frac{1}{2}$.

Il en va de même pour les nombres impairs, qui ont également une densité limite égale à $\frac{1}{2}$.

Les nombres multiples de 3 ont une densité limite de $\frac{1}{3}$.
Certains ensembles n'ont même pas de densité limite…

Et les nombres premiers ? Ont-ils une densité limite ? Et si oui, laquelle ?

Un ensemble infini qui a une densité limite nulle est un ensemble qui se raréfie : en allant assez loin dans la suite des entiers, on trouve moins d'un entier sur 10 qui appartient à cet ensemble, en allant plus loin, moins d'un entier sur 100, en allant plus loin encore, moins d'un entier sur 1000, etc.

Revenons à l'ensemble des nombres premiers. C'est un ensemble réputé irrégulier…
Le serait-il au point de n'avoir pas de densité limite ? Eh bien non :

THÉORÈME DE RARÉFACTION DE LEGENDRE

L'ensemble de nombres premiers admet une densité limite nulle.

Autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$.

L'ensemble des nombres premiers possède une densité limite nulle : c'est donc un ensemble qui, bien qu'infini, devient de plus en plus ténu à l'infini.
Plus on progresse vers les grands nombres, plus il est difficile d'en trouver des éléments.
Cela fut démontré par Legendre en 1808.

Le "théorème des nombres premiers" : vitesse de raréfaction

Lorsqu'on cherche à savoir comment une expression tend vers l'infini, on peut essayer de trouver une fonction qui tend de la même façon… Autrement dit, on cherche une fonction f telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{f(n)} = 1 \text{ .}$$

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\pi(n)}$	$\ln(n)$
10	4	2,5	≈ 2,3
10^2	25	4	≈ 4,61
10^3	168	≈ 5,95	≈ 6,91
10^4	1229	≈ 8,14	≈ 9,21
10^5	9592	≈ 10,43	≈ 11,51
10^6	78498	≈ 12,74	≈ 13,82
10^7	664 579	≈ 15,05	≈ 16,12
10^8	5 761 455	≈ 17,36	≈ 18,42
10^9	50 847 534	≈ 19,67	≈ 20,72
10^{10}	455 052 511	≈ 21,98	≈ 23,02

En observant le tableau ci-dessus, qui cherche à approcher le rapport $\frac{n}{\pi(n)}$, **<u>conjecturer</u>** une bonne approximation de l'inverse la proportion de nombres premiers inférieurs à n :

$$\frac{n}{\pi(n)} \approx$$

En déduire une approximation de $\pi(n)$:

$$\pi(n) \approx$$

En 1896, le « théorème des nombres premiers » est démontré indépendamment par le français Jacques Hadamard et le belge Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas, baron de La Vallée-Poussin.

THÉORÈME DE RARÉFACTION
DE HADAMARD ET DE LA VALLÉE-POUSSIN

$\pi(n)$ tend vers l'infini de la même façon que $\dfrac{n}{\ln(n)-1}$.

Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(n)\times\dfrac{\ln(n)-1}{n}=1$.

Autrement dit : $\pi(n) \approx \dfrac{n}{\ln(n)-1}$ en l'infini.

Une idée de génie, suivie de démonstrations géniales

En 1848, dans une lettre adressée à l'astronome allemand Johan Encke, Carl Friedrich Gauss explique que l'examen des tranches de 1000 entiers dans les tables de nombres premiers l'a conduit, dès 1792, à l'hypothèse que la densité des nombres premiers proches de *n* est environ $\dfrac{1}{\ln(n)}$.

Remarque : en 1792, ***Gauss avait 15 ans*** *!*

Gauss n'a pas publié son hypothèse, car il n'a pas su en démontrer la vérité, mais il avait vu juste !

En termes probabilistes, la conjecture de Gauss, selon laquelle la densité des nombres premiers aux environs de *n* serait $\dfrac{1}{\ln(n)}$, signifie qu'en prenant un nombre au hasard aux environs de *n*, on tombera sur un nombre premier avec une probabilité de $\dfrac{1}{\ln(n)}$.

Par exemple :

- aux environs de 1000, il y aurait une proportion de $\dfrac{1}{\ln(1\,000)}\approx 14{,}48$ % de nombres premiers ;
- aux environs de 1 000 000, il y aurait une proportion de $\dfrac{1}{\ln(1000000)}\approx 7{,}24$ % de nombres premiers.

Ce résultat de densité conduit Gauss à proposer la fonction « logarithme intégral », noté $\mathrm{li}(n)$, comme approximation de $\pi(n)$: $\mathrm{li}(n)=\displaystyle\int_2^n \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

Remarque : parfois on commence l'intégration à 0 au lieu de 2, car cela ne change le résultat que d'environ 1,05.

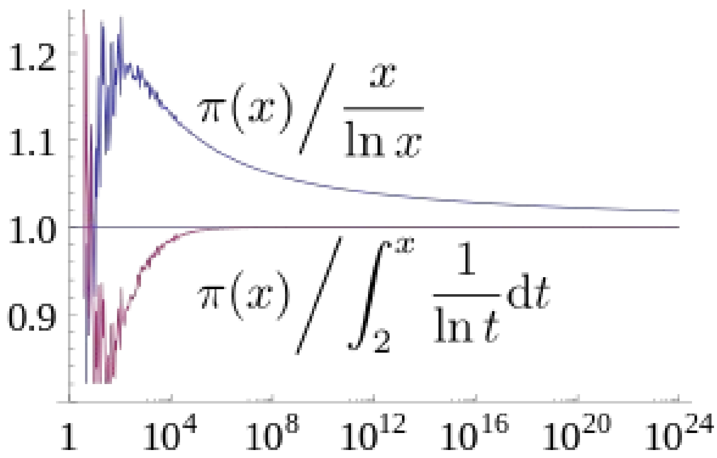
Compléter le tableau page suivante, qui compare les approximations

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)-1}$$

et

$$\pi(n) \approx \mathrm{li}(n) .$$

n	$\pi(n)$	$\dfrac{n}{\ln(n)-1}$	$\mathrm{li}(n)$	$\mathrm{li}(n)-\dfrac{n}{\ln(n)-1}$
10	4	$\approx$ 7,7	$\approx$ 5,1	$\approx$
10^2	25	$\approx$ 27,7	$\approx$ 29,1	$\approx$
10^3	168	$\approx$ 169,3	$\approx$	$\approx$
10^4	1229	$\approx$ 1218	$\approx$	$\approx$
10^5	9592	$\approx$ 9512,1	$\approx$	$\approx$
10^6	78498	$\approx$ 78030,4	$\approx$	$\approx$
10^7	664 579	$\approx$ 661 459	$\approx$	$\approx$
10^8	5 761 455	$\approx$ 5 740 303,8	$\approx$	$\approx$
10^9	50 847 534	$\approx$ 50 701 542,5	$\approx$	$\approx$
10^{10}	455 052 511	$\approx$ 454 011 971,3	$\approx$	$\approx$



Plus récemment, en 1999, Pierre Dusart a démontré le résultat suivant :

$$\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{0.992}{\ln x}\right) \underset{x\geq 599}{\leq} \pi(x) \underset{x>1}{\leq} \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1.2762}{\ln x}\right).$$

B. Une infinité arithmétique dans les suites arithmétiques ?

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) était un mathématicien allemand originaire de Düren en Allemagne où son père, Johann Arnold Lejeune Dirichlet, était maître des postes et commerçant.
Son grand-père paternel avait émigré à Düren au départ de Richellette, un village au voisinage de Liège en Belgique, d'où son patronyme « Lejeune Dirichlet » (« le jeune de Richellette »).

Il prouva le théorème suivant en 1837 :

THÉORÈME DE LA PROGRESSION ARITHMÉTIQUE DE DIRICHLET

Si a et b sont premiers entre eux, alors la progression arithmétique $an+b$ où $n \in \mathbb{N}$ contient une infinité de nombres premiers.

Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors il existe au plus un nombre premier de la forme $an+b$.

Démontrons un cas particulier de ce théorème, à savoir qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Donner 5 nombres premiers de la forme $4k+3$.

2. Montrer qu'un nombre premier autre que 2 est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$).

3. Supposons qu'il existe un nombre fini p_1, p_2, … , p_n de nombres premiers de la forme $4k+3$.

a) On pose $\mathrm{N} = 4\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} p_{\mathrm{i}} - 1$. Démontrer que N est impair et que $\mathrm{N} \geqslant 2$.

b) Démontrer que p_1 ne divise pas N. De même pour tous les p_{i} avec $2 \leqslant \mathrm{i} \leqslant n$.

c) De quelle forme sont alors les diviseurs premiers de N ?
Montrer alors que N est de la forme $4k+1$.

d) Conclure.

En 2004, les mathématiciens Ben Green et Terence Tao (médaille Fields 2006) démontrent ce théorème :

THÉORÈME DE GREEN-TAO

La suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues.
Autrement dit, pour un entier naturel k arbitraire, il existe une suite arithmétique de k termes formée de nombres premiers.

La plus longue suite connue a été trouvée le 12 avril 2010 par Benoît Perichon et PrimeGrid[1]; elle est constituée de 26 termes : $43\,142\,746\,595\,714\,191 + n\,[\mathrm{P}(23) \times 23\,681\,770]$
avec n entier allant de 0 à 25 et $\mathrm{P}(23)$, primorielle de 23, valant :

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 = 223\,092\,870.$$

1 PrimeGrid est un projet de calcul distribué pour la recherche de nombres premiers. Il utilise la plateforme Berkeley Open Infrastructure for Network Computing (BOINC). En juillet 2011, il y a 7 300 participants actifs environ (pour 14 900 ordinateurs actifs) provenant de 114 pays offrant une puissance de calcul totale de 2,3 petaflops ($2{,}3 \times 10^{15}$ opérations par seconde).

Le 16 mars 2012, James Fry (puis Bryan Little le 23 février 2014), en ont trouvé deux autres de même longueur (26 termes de $n = 0$ à 25).
Avec les mêmes notations, il s'agit des deux suites :

$$3\,486\,107\,472\,997\,423 + n\ [\ P(23) \times 1\,666\,981\ ]$$
$$136\,926\,916\,457\,315\,893 + n\ [\ P(23) \times 44\,121\,555\ ].$$

Si l'on exige de plus que les nombres premiers soient consécutifs, comme pour la suite (3, 5, 7), on ne sait pas s'il existe des suites de longueur arbitraire.

La plus petite suite de quatre nombres premiers consécutifs est (251, 257, 263, 269).

La plus longue suite connue contient dix termes (découvertes en 1998 puis 2008) : la raison est 210 et ces dix nombres s'écrivent chacun avec 93 chiffres.

En 2008, Terence Tao et Tamar Ziegler ont démontré le théorème suivant :

« Pour tout entier k, l'ensemble des nombres premiers contient
une progression arithmétique de longueur k dont la raison est un carré. »

Pour voir les records mis à jour : http://primerecords.dk/cpap.htm

Dans le sublime livre « Merveilleux nombres premiers » de J.-P. Delahaye, on peut lire :

Récemment, John Friedlander, de l'Université de Toronto, et Henryk Iwaniec, de l'Université Rutgers, ont prouvé qu'il existait une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + m^4$. Ce résultat constitue une avancée remarquable, car l'ensemble des nombres de la forme $n^2 + m^4$ possède une densité limite nulle. Or personne n'avait réussi à établir jusqu'à présent qu'un ensemble de densité limite nulle, défini par une expression polynomiale simple, contenait une infinité de nombres premiers (le théorème de Dirichlet ne concerne que des ensembles de densité limite supérieure à 0). En revanche, on recherche toujours la preuve qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$, ce que l'on croit vrai.

Sources :

Merveilleux nombres premiers, J.-P. Delahaye, éd. Belin Pour la Science (2ème édition, 2012)
MATH'x, manuel scolaire, éd. Didier, Tle S spécialité (2016)
Transmath, manuel scolaire, éd. Nathan, Tle S spécialité (2012)
Wikipedia