DIVISIBILITÉ DANS Z. DIVISION EUCLIDIENNE ET CONGRUENCE.
~ EXERCICES ~

Exercice 1

1. Déterminer pour quels entiers naturels n l'entier $n+1$ divise $3n+8$.

2. Déterminer les restes possibles dans la division de $3n+8$ par $n+1$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n+1)(2n+1)$ est un divisible par 3.

Exercice 3

On considère les nombres de 4 chiffres palindromes, c'est-à-dire s'écrivant de façon symétrique.
Par exemple, 1001 et 5885 son palindromes.
Démontrer que tous les nombres palindromes à 4 chiffres sont divisibles par 11.

Exercice 4

Démontrer que, quel que soit l'entier relatif n, $3n-1$ et $5n-2$ sont premiers entre eux.

Exercice 5 *D'après BAC*

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont aussi des multiples de 7.

2. Déterminer les restes dans la division par 7 des puissances de 2.

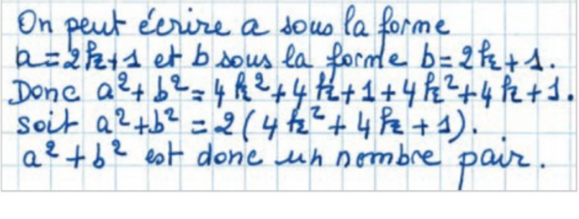
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$.
a) Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.

c) Étudier le cas où $p=3n+2$.

Exercice 6

Un élève veut étudier la parité de a^2+b^2 quand a et b sont impairs. Analyser sa solution.


On peut écrire a sous la forme
$a=2k+1$ et b sous la forme $b=2k+1$.
Donc $a^2+b^2=4k^2+4k+1+4k^2+4k+1$.
soit $a^2+b^2=2(4k^2+4k+1)$.
a^2+b^2 est donc un nombre pair.

Exercice 7

1. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$.

2. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 3^n-1 par 3^{n-1}.

Exercice 8

1. a) Déterminer, suivant la valeur de l'entier naturel non nul n, le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b) Démontrer alors que $2005^{2005} \equiv 7$ [9].

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $10^n \equiv 1$ [9].

b) On désigne par N un entier naturel écrit un base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer que $\mathrm{N} \equiv \mathrm{S}$ [9].

c) En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.

3. On note $\mathrm{A}=2005^{2005}$. On désigne par B la somme des chiffres de A, par C la somme des chiffres de B et par D la somme des chiffres de C.
a) Démontrer que $\mathrm{A} \equiv \mathrm{D}$ [9].

b) Sachant que $2005<10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres.
En déduire que $\mathrm{B} \leqslant 72180$.

c) Démontrer que $\mathrm{C} \leqslant 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e) Démontrer que $\mathrm{D}=7$.

Exercice 9 *Une équation de Pell-Fermat*

Le but de l'exercice est de déterminer des couples d'entiers vérifiant l'égalité (1) : $a^2-2b^2=1$.

1. On suppose que $(a\,;b)$ est solution.
a) Démontrer que a est impair.
En déduire que a^2-1 est divisible par 4 puis que b est pair.

b) Démontrer que a et b sont premiers entre eux.

2. a) Déterminer une solution évidente de (1).

b) Démontrer que si $(a\,;b)$ est solution de (1), alors le couple $(3a+4b\,;2a+3b)$ l'est également.
La réciproque est-elle vraie ? Qu'en conclure ?

c) Déterminer trois autres solutions de (1).

On appelle équation de Pell-Fermat l'équation diophantienne $y^2-d\,x^2=\pm 1$, où d est un entier qui n'est pas un carré.
L'adjectif « diophantienne » signifie que l'on cherche des solutions avec x et y qui sont des entiers.
Cette équation porte le nom du mathématicien anglais John Pell, mais c'est une erreur due à Euler qui lui attribua faussement son étude. En fait, le premier à avoir décrit l'ensemble des solutions de cette équation est le mathématicien indien Brahmagupta, qui vivait au VII^ème^ siècle après J-C, soit près de 1000 ans avant Pell. Ses résultats étaient totalement inconnus des mathématiciens européens du XVII^ème^ siècle, et c'est Fermat qui remit cette équation au goût du jour, conjecturant qu'elle avait toujours une infinité de solutions.
Il fallut attendre Lagrange, un siècle plus tard, pour obtenir une nouvelle preuve totalement rigoureuse de ce résultat.

Exercice 10

D'après BAC

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \pmod{2^n}$.

Partie A. Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, on suppose $n=2$. Montrez que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n=3$.

a) m est un entier naturel. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8, et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b) Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7 \pmod 8$?

Partie B. Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \pmod{2^n}$.

1. Justifiez le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x=2q$, $y=2r$, $z=2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.

a) Montrez que $x^2+y^2+z^2 \equiv 1 \pmod 4$.

b) Déduisez-en une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a) Prouvez que, pour tout entier naturel k non nul, k^2+k est divisible par 2.

b) Déduisez-en que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \pmod 8$. Concluez.

Exercice 11

D'après BAC

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul. Par exemple : $10=9+1^2$; $13=9+2^2$, etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$

a) Montrez que si a existe, alors a est impair.

b) En raisonnant modulo 4, montrez que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$

a) Montrez que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b) Montrez que si a existe, alors a est pair. Déduisez-en que nécessairement, n est pair.

c) On pose $n=2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduisez d'une factorisation de 3^n-a^2, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

a) En raisonnant modulo 3, montrez que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b) On pose $n=2p$, où p est un entier naturel, $p \geqslant 1$.

En vous inspirant de la question **2.c)**, démontrez qu'il existe un unique entier naturel a tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.

Exercice 12

Quel est le reste dans la division euclidienne de 23^{41} par 7 ?

Exercice 13

Démontrer que $1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013}$ est divisible par 5.

Exercice 14

Trouver le reste dans la division euclidienne de 2 690 549 588 157 par 97.

Exercice 15

Démontrer que 9^{22} et 9^{20} ont le même chiffre des unités.

Exercice 16

Résoudre l'équation $3x \equiv 1$ [7].

Exercice 17

1. a) Démontrer que si k ne divise pas n alors aucun multiple de k ne divise n.

b) Démontrer la phrase suivante, trouvée dans un livre proposant de déterminer la liste des diviseurs positifs d'un entier naturel :

« Lorsqu'on trouve un diviseur k de n, on trouve aussi son diviseur $\frac{n}{k}$.

Lorsque le diviseur testé k est supérieur au quotient $\frac{n}{k}$, on a alors la garantie d'avoir trouvé tous les diviseurs de n. »

2. Déterminer la liste des diviseurs de 90, de 700 puis de 782.

3. Écrire et programmer un algorithme qui affiche tous les diviseurs d'un entier naturel donné.

Exercice 18

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre.
On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres.
On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8.

Exemple :

Code : s00212913862
Rang dans l'alphabet de la lettre s : 19
Nombre obtenu : 1900212913862

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
   - **a.** Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
   - **b.** Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
   - **c.** Que peut-on dire de ce billet ?
2. Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre illisible.
   Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9. En déduire x.
3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
   - **a.** Déterminer les valeurs possibles de n.
   - **b.** Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?