Amérique du Sud 2017 (3)

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.
Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.
La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\,\%$.
Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.
Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\,\%$.
La fréquence de poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.
On note p_1 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

1. Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 puis de la proportion p_2.
   On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3}.
2. Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente ?

PARTIE B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

— sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;

— sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

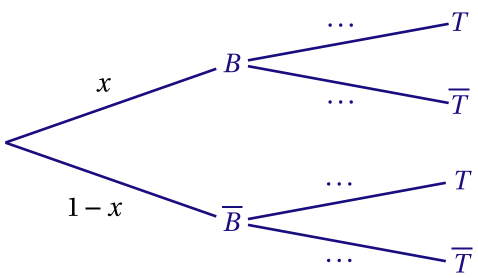
— B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;

— T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;

— $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de B et T.

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2. a) Démontrer que $p(T) = 0{,}5x + 0{,}1$.
   b) Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif.
   Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?

Amérique du Sud 2017 (3)
suite

PARTIE C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.
Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 21$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Déterminer la probabilité $p(14 < X < 28)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.

Antilles Guyane septembre 2017 (3)

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

— 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course ;

— 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course ;

— 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PARTIE A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

— V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert » ;

— B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu » ;

— R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge » ;

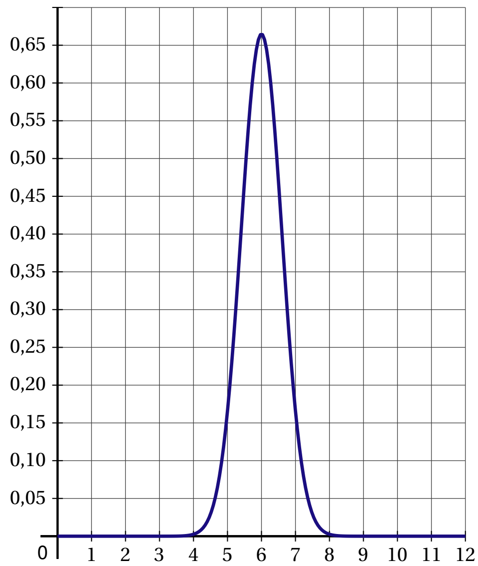
— A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert ?
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0{,}012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

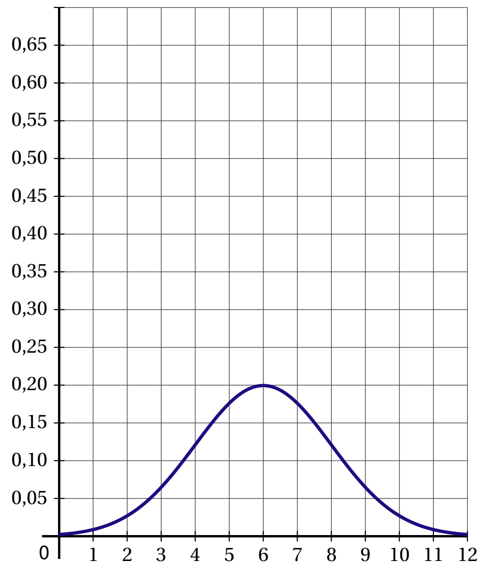
PARTIE B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



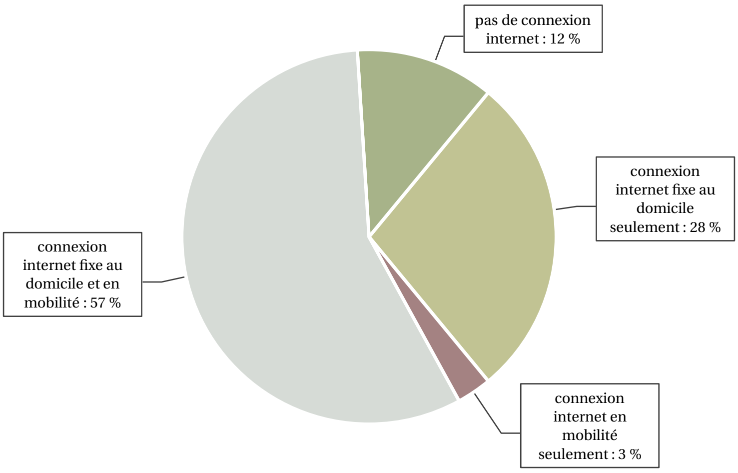
graphique 2

Antilles Guyane septembre 2017 (3)
suite

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.
   a) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?
   b) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

Asie 2017 (2)

Le graphique suivant indique le type de connexion à internet dont disposent les Français âgés de plus de 12 ans en juin 2016.



Source : CREDOC, Enquêtes sur les « Conditions de vie et les aspirations », juin 2016.

On choisit au hasard une personne âgée de plus de 12 ans dans la population française.
On note D l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile ».
On note M l'évènement« la personne dispose d'une connexion internet en mobilité ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

PARTIE A

1. Donner sans justification $p(D \cap M)$, puis justifier que $p(D) = 0{,}85$.
2. Calculer la probabilité que la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile sachant qu'elle dispose d'une connexion internet en mobilité.
3. Calculer la probabilité de l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet ».
4. Calculer $p_{\overline{M}}\left(\overline{D}\right)$.

PARTIE B

On interroge un échantillon aléatoire de 100 personnes dans la population française.
Soit X la variable aléatoire qui, à cet échantillon, associe le nombre de personnes ayant une connexion internet fixe au domicile.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer $P(X \leqslant 75)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de Français ayant une connexion internet fixe au domicile pour un échantillon de taille 100.
2. Une enquête sur les usages du numérique, menée en juin 2016 auprès des habitants d'un petit village de montagne, amène au constat suivant : parmi les 100 habitants de plus de 12 ans de ce village, 76 d'entre eux disposent d'une connexion internet fixe au domicile.
   Que peut-on penser de l'équipement en connexion internet fixe au domicile dans ce village ?

Polynésie 2017 (2)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publiée par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %.
On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.
On considère les évènements suivants :

— A « le candidat a suivi la filière AAC » ;

— R « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. a) Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.
   b) Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.
   b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
3. Justifier que $P(R) = 0,6028$.
4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

PARTIE B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.
Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école ?
   Justifier votre réponse.

PARTIE C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.
2. Déterminer $P(X \leqslant 1155)$.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
3. a) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0,2$.
   b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Polynésie septembre 2017 (4)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez deux fournisseurs :

— un fournisseur A qui lui garantit 99 % d'étuis non défectueux;

— un fournisseur B qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

On sait également que 80 % des étuis achetés par l'entreprise proviennent du fournisseur A (le reste provenant du fournisseur B).
On choisit au hasard un étui de smartphone et on considère les évènements suivants :

— A : « l'étui provient du fournisseur A »;

— B : « l'étui provient du fournisseur B »;

— D : « l'étui est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un étui soit défectueux.
3. On choisit un étui au hasard et on constate qu'il est défectueux.
   Montrer que la probabilité qu'il provienne du fournisseur B est égale à 0,6.

PARTIE B

On rappelle que le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux.
Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent du fournisseur B. Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur B.
   On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.
2. Faut-il informer le fournisseur B d'un problème ?

PARTIE C

Un étui est considéré comme conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.
Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B.
On note X la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que X suit une loi normale d'espérance 20 mm.

1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de X est égal à 0,2.
   Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.
2. Déterminer une valeur de l'écart-type de X pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

Antilles Guyane 2017 (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,42$. On peut affirmer que :

   a) $P_A(B) = 0,3$ b) $P(A \cup B) = 0,58$ c) $P_B(A) = 0,28$ d) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,28$

2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;5]$.

   a) L'espérance de cette loi X est $\frac{2}{5}$ b) $p(X > 2) = \frac{3}{5}$ c) $p(X \leqslant 2) = \frac{3}{5}$ d) $p(X \leqslant 5) = 0$.

3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

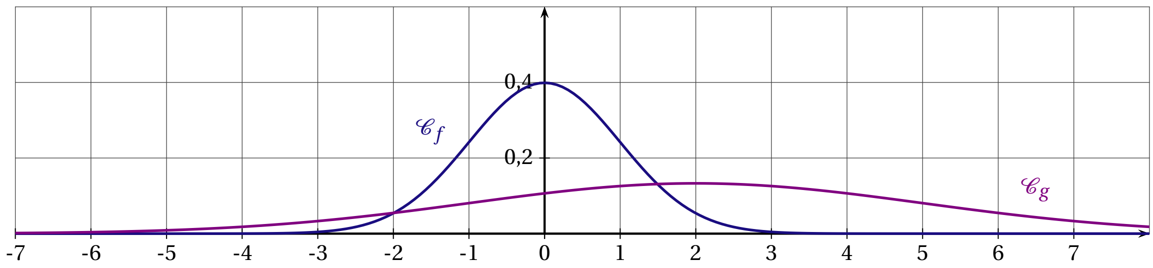
   a) $p(Y \leqslant 100) = 0,45$ b) $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0,95$ c) $p(Y \leqslant 110) \approx 0,85$

4. Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

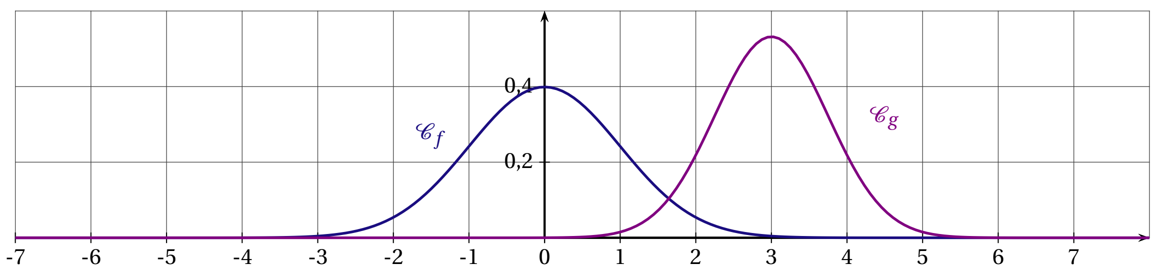
   a) 30 b) 64 c) 100 d) 400

5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$. La représentation graphique de ces deux fonctions est :

   a)

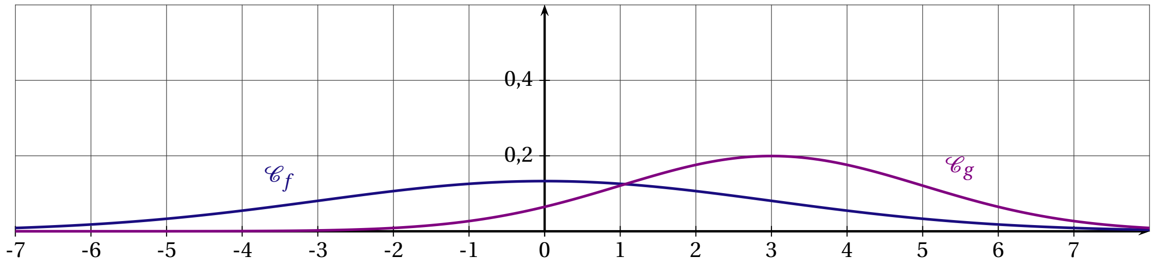


   b)

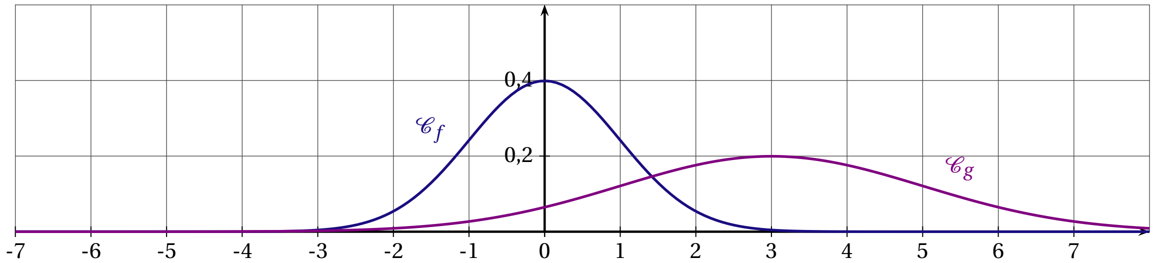


Antilles Guyane 2017 (1)
suite

c)



d)



France Métropolitaine (repassé) 2017 (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$ alors $P(X \leqslant 2{,}5)$ a pour valeur approchée arrondie au centième :

   a) 0,16 b) 0,26 c) 0,31 d) 0,54

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type σ. Si $P(-5 \leqslant Y \leqslant 5) \approx 0{,}95$ alors, parmi les réponses suivantes, la meilleure valeur approchée de σ est :

   a) 5 b) 2,5 c) 1,3 d) 0,95

3. Un institut de sondage réalise une enquête afin de mesurer le degré de satisfaction du service après-vente d'une société. Une première étude portant sur un échantillon aléatoire de 500 clients révèle que l'on dénombre 438 clients satisfaits. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant d'estimer la proportion de clients satisfaits est :

   a) $[0{,}079\,;0{,}169]$ b) $[0{,}455\,;0{,}545]$ c) $[0{,}831\,;0{,}921]$ d) $[0{,}874\,;0{,}878]$

4. Cet institut souhaite réduire l'amplitude de l'intervalle de confiance. Combien de personnes au minimum faut-il interroger pour que cet intervalle de confiance ait une amplitude d'au plus 0,05 ?

   a) 1500 b) 40 c) 2000 d) 400

   Remarque : l'amplitude d'un intervalle $[e, f]$ est le nombre $f - e$.