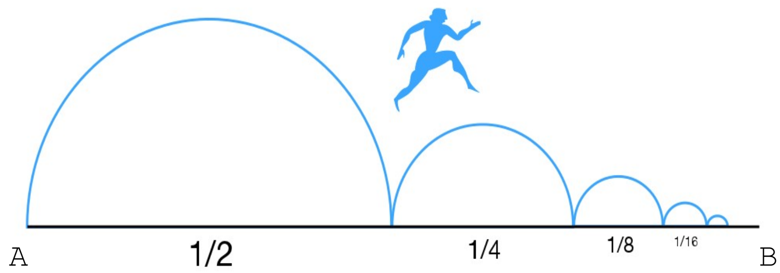
L'INFINI : LE THÉORÈME DE RÉARRANGEMENT DE RIEMANN

Dans mon précédent article (*l'infini ou les infinis ? vers l'hypothèse du continu…*), je vous démontrais que la notion d'infini n'est pas si facile à appréhender ; même tellement difficile qu'il aura fallu des millénaires aux mathématiciens pour que l'infini prenne réellement un statut rigoureux au XIXe siècle avec l'immense Georg Cantor.
Je vous expliquais alors que l'infini des réels ($\mathbb{R}$) est strictement plus grand que celui des entiers naturels, qu'il y a un infini plus grand que celui de $\mathbb{R}$ (argument de la *diagonale de Cantor*) et même une infinité d'infinis !
Je terminais en décrivant l'importante hypothèse du continu (que l'on peut faire ou pas…), vous promettant de vous montrer, sur des exemples simples, à quel point l'infini vient perturber notre intuition.

Exemple 1 : le paradoxe de la dichotomie

À priori, la somme d'un nombre infini de longueurs est une longueur infinie…

Le paradoxe de la dichotomie est formulé par Zénon d'Élée[1] pendant l'Antiquité.



En voici une version plus moderne : Christophe doit parcourir 1 km, du point A au point B.
Il doit d'abord parcourir la moitié de la longueur (1/2), puis la moitié de la longueur restante (1/4), et ainsi de suite en poursuivant le processus de division à l'infini.

En théorie, Christophe ne pourra donc jamais atteindre le point B, puisqu'il lui restera toujours la moitié de la longueur restante, qui est non nulle...
Mais la longueur totale (1 km) est égale à 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + ...
Autrement dit, voilà **une somme infinie de longueurs dont le résultat est fini** et égal à 1 :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots=1$$

Exemple 2 : 0,9999… = ?

Notons $x=0{,}9999...$:

$$\begin{aligned}10x&=9{,}9999...\\10x&=9+0{,}9999...\\10x&=9+x\\10x-x&=9\\9x&=9\\x&=1\end{aligned}$$

Incroyable, non ?!

Certes, on a fait un peu n'importe quoi[2] avec l'infini, puisqu'on s'est permis de le multiplier, le soustraire, etc. Mais cela se démontre plus rigoureusement au lycée et n'en reste pas moins vrai :

0,9999… = 1.

---

1 Né vers 490 av. J.-C. et mort vers 430 av. J.-C. Sa vie est très mal connue.
Platon rapporte la rumeur ambiguë qu'il serait le principal disciple de Parménide, qui fut aussi son amant.
Selon Diogène Laërce, Aristote attribue à Zénon d'être l'inventeur de la dialectique (méthode de raisonnement qui cherche à établir la vérité en défendant successivement des thèses opposées) ; l'œuvre de Zénon a été consacrée à argumenter contre les contradicteurs de son maître.
Toujours selon D. Laërce, il aurait cherché à renverser un tyran d'Élée au péril de sa vie : « Comme il avait voulu renverser le tyran Néarque, d'autres disent Diomédon, il fut arrêté. Comme on lui demandait de dénoncer ses complices et d'avouer qu'il avait fait porter des armes à Lipara, il dénonça tous les amis du tyran pour bien montrer combien ce tyran était abandonné de tous et, après lui avoir parlé de choses diverses, il lui dit qu'il avait quelque chose à lui conter à l'oreille et la lui mordit à belles dents, ne lâchant que quand il lui en eut enlevé un morceau. Démétrios dit que c'est le nez qu'il lui arracha d'un coup de dents. Antisthène raconte que quand il eut dénoncé les amis du tyran, celui-ci lui demanda s'il n'y avait pas encore d'autres complices, et qu'il répondit : *Toi-même, le fléau de la ville.* Il ajouta pour les assistants : *Vous serez des lâches, si après ce que je vais faire, vous continuez à être esclaves du tyran.* Là-dessus, il se coupa la langue, et la lui cracha au visage. Ses concitoyens s'élancèrent alors sur le tyran et le lapidèrent. C'est la tradition générale. Hermippe soutient toutefois que Zénon fut jeté dans un mortier et pilé sous la meule. »

2 Attention aux opérations sur l'infini !
Par exemple, notons S = 1+2+4+8+… ; alors 2S = 2+4+8+16+… donc 2S = S−1 et S = -1. Ceci est absurde : 1+2+4+8+… $\neq$ -1.

Exemple 3 : la série harmonique

La série harmonique[3] est la somme des inverses des entiers naturels : 1+1/2+1/3+1/4+1/5+… . Il s'agit d'une somme infinie de termes positifs : le résultat est-il fini comme à l'exemple 1 ? On peut s'y attendre, puisqu'on ajoute à chaque fois un terme de plus en plus petit. Et pourtant...

Avec de la patience et du courage, ou un bon algorithme, on peut calculer à la main :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1\,000}\approx 7{,}4855 \;;\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{10\,000}\approx 9{,}7876 \text{ et } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{50\,000}\approx 11{,}3970 .$$

Tenez-vous bien : il faut ajouter plus de 10^{43} termes[4] pour que la somme dépasse 100…

Le français Nicole (Nicolas) Oresme[5] est considéré comme le premier savant à avoir démontré, au milieu du XIV^e siècle, que cette somme est infinie.

Écrite rapidement, l'idée (de génie !) d'Oresme est la suivante :

Son idée consiste à regrouper les termes par blocs en doublant la taille des blocs à chaque fois. Oresme en conclut qu'« il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini ».
On remarque qu'il écrit des inégalités de limites avant même de savoir si ces limites existent, sont finies ou infinies, mais cela se démontre rigoureusement aujourd'hui.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots$$
$$= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$> \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$> \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

En conclusion : $\mathbf{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=+\infty}$.

Exemple 4 : le problème de Bâle

Au XVII^e siècle, le mathématicien et prêtre italien Mengoli retrouve le résultat d'Oresme par une autre méthode. Les célèbres frères Bernoulli – Johann (1677-1748) et Jacob (1654-1705), francisés Jean et Jacques, mathématiciens suisses d'origine belge – en feront de même au milieu du XVIII^e.

Malgré ses recherches, Mengoli échoue à calculer la somme des inverses des carrés et pose explicitement le problème en 1644 : $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots=\ ?$

Les mathématiciens, ne trouvant pas de valeur exacte, cherchent d'abord des valeurs approchées de ce résultat. Mais la convergence semble très lente… pour obtenir 4 décimales exactes, il faut additionner plus de 15 000 termes de la somme ! De brillants cerveaux, dont ceux des frères Bernoulli, s'attaquèrent sans succès au problème. Ce n'est qu'en 1735 que l'immense et génial Leonhard Euler (1707-1783) trouva la réponse, étonnante de simplicité et de beauté : $\mathbf{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}}$.

Ceci valut au jeune Euler (28 ans à l'époque) une grande notoriété[6].

Ce résultat s'appelle communément « problème de Bâle » et non « de Mengoli », sans doute parce que la ville natale d'Euler (et la résidence de la famille Bernoulli) est Bâle.

Cela nous amènera peut-être, prochainement, à parler de l'hypothèse de Riemann (en lien avec le problème de Bâle), l'un des problèmes dont la démonstration vaut 1 million de dollars depuis l'an 2000.

---

3 Le réformateur religieux, mathématicien et philosophe Pythagore vouait aux nombres et aux proportions un profond mysticisme. Avec son école, il aurait créé la première gamme de notes de musique (en fait, les Égyptiens utilisaient déjà une gamme de 7 notes qu'ils avaient associées aux 7 planètes). « Harmonie » vient du latin *harmonia*, mot qui vient lui-même du grec αρμονια signifiant au sens propre *arrangement, ajustement, assemblage de plusieurs parties, juste rapport*… La suite 1 ; 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; etc. « s'introduit naturellement » en musique et les pythagoriciens l'avaient observé : en pinçant une corde sur sa moitié, au tiers, au quart… on obtient des notes *harmonieuses*.

4 Soit plus de dix millions de milliards de milliards de milliards de milliards de termes...
Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

5 Oresme aura une brillante carrière ecclésiastico-politique au service du roi Charles V « le Sage » dont il fut successivement le secrétaire, le conseiller et le chapelain, sans cesser de s'intéresser aux questions scientifiques.
Entre 1370 et 1376, à la demande du roi, il traduit en français la plus grande partie de l'œuvre d'Aristote qu'il enrichit de commentaires critiques qui révèlent sa propre pensée scientifique : Oresme formule notamment l'hypothèse de la rotation de la Terre sur elle-même en vingt-quatre heures, et celle, tout aussi audacieuse, de l'infinitude de l'univers. Pour le récompenser de ce travail considérable qui contribue au rayonnement de la langue française, le roi le sacrera évêque de Lisieux le 23 janvier 1378 et lui offrira deux anneaux d'or.
Tant par son style novateur que par son esprit à la fois critique et audacieux, Oresme aura joué un rôle capital dans le passage de la science médiévale à la science moderne. Ses œuvres qui regroupent aussi bien l'astronomie, l'astrologie (art divinatoire qu'il a remis en cause), les mathématiques, la physique et l'économie politique montrent une personnalité hors du commun, qui s'est intéressée à toutes les réflexions de son temps, à tous les débats. Homme d'Église, fidèle à sa tradition, il n'a pourtant pas hésité à formuler des hypothèses, émettre des doutes, oser avancer des arguments qui allaient à contresens des volontés théologiques de son temps.
Il a bénéficié de l'appui royal, sachant rester conseiller et homme de confiance du roi qui, grâce à son amour des arts et sa volonté de développer l'érudition, lui a permis de travailler dans des conditions matérielles et intellectuelles exceptionnelles.

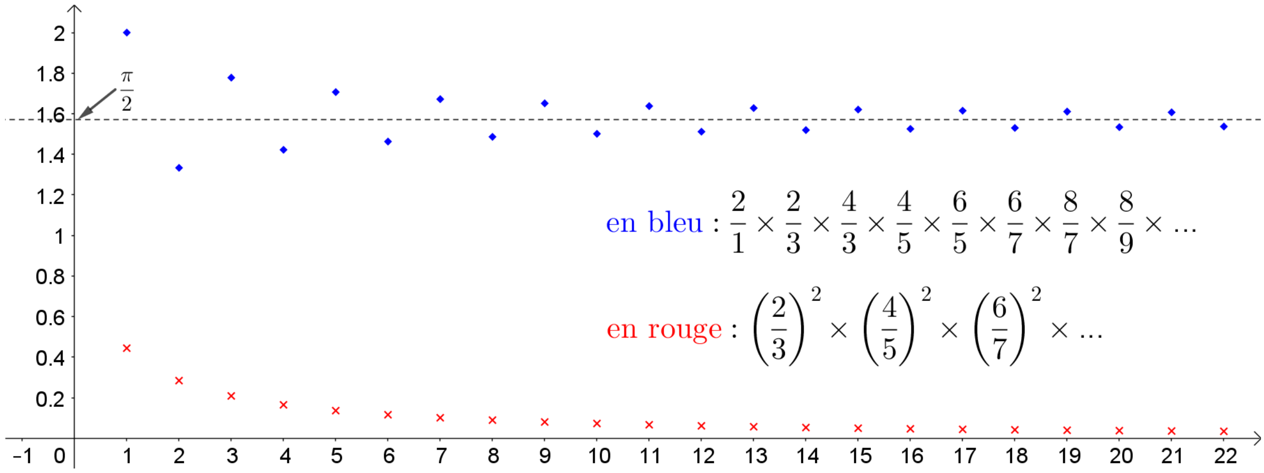
6 Signalons que, même pour les critères de l'époque, la démonstration de 1735 donnée par Euler n'est pas rigoureuse : il faudra attendre 1742 pour qu'Euler comble les « trous » de sa démonstration.

Exemple 5 : le théorème de réarrangement de Riemann

John Wallis (1616-1703) prouva en 1655 que : $\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\ldots=\frac{\pi}{2}$.

Or, en réordonnant les termes : $\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\ldots=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(\frac{6}{7}\right)^2\ldots$.

Ceci est un produit de termes tous strictement inférieurs à 1, donc il est strictement inférieur à 1 et par conséquent à $\frac{\pi}{2}$. On peut même démontrer que ces nouveaux produits tendent vers 0 :



Patatras ! En réordonnant les termes, on a changé la limite ! L'infini commence à faire peur…

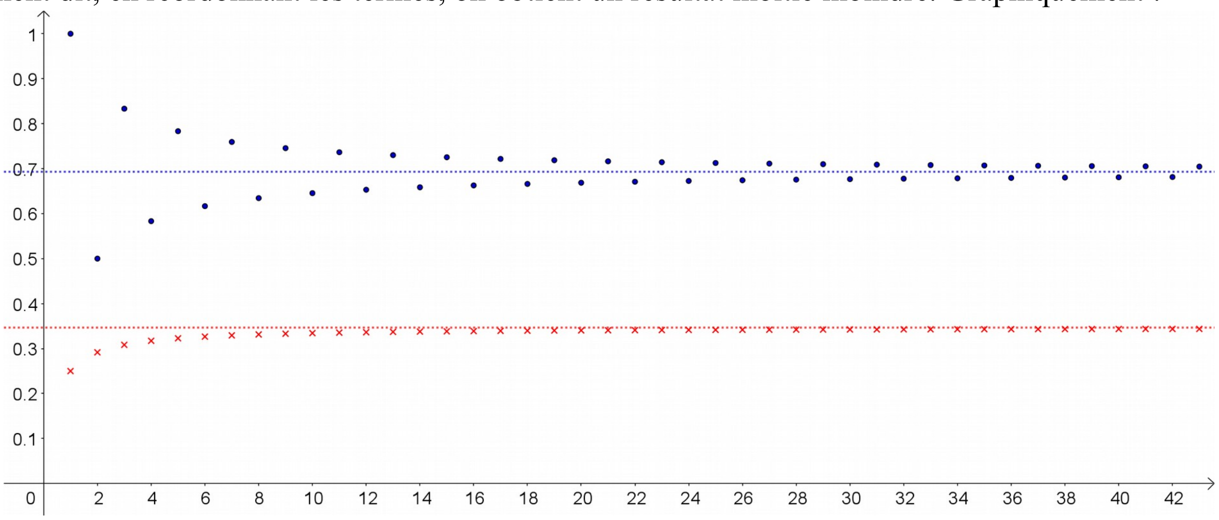
Le **théorème de réarrangement de Riemann** est un théorème, nommé en l'honneur du grand mathématicien Bernhard Riemann (1826-1866), d'après lequel on peut réarranger, sous certaines conditions, les termes d'une somme infinie pour qu'elle converge vers… n'importe quel réel ! Ou même qu'elle tende vers l'infini… Stupéfiant !

Un exemple classique est celui de la série harmonique alternée, notée S : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots$.

En ordonnant différemment les termes de S, on obtient :

$$S=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S\,.$$

Autrement dit, en réordonnant les termes, on obtient un résultat moitié moindre. Graphiquement :



La découverte de l'existence d'un tel théorème – en préparant le club maths pour mes élèves – fut un choc. Je peux dire que cela a bouleversé mon enseignement et mes connaissances mathématiques !

Comme l'écrivait le génial poète et écrivain roumain Emil Cioran (1911-1995), « n'a de convictions que celui qui n'a rien approfondi. » Trente-neuf ans plus tôt, il affirmait : « la connaissance à petite dose enchante ; à forte dose, elle déçoit. Plus on en sait, moins on veut en savoir. Car celui qui n'a pas souffert de la connaissance n'aura rien connu. »

Johan Mathieu, professeur de mathématiques