Correction 1

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$OA_n = 5$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

$$OA = \sqrt{\left(x_A - c_O\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(-3-0\right)^2 + \left(4-0\right)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

- **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$$OA_n = 5$$
qui se traduit par :
$$\sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} = 5$$
$${x_n}^2 + {y_n}^2 = 25$$
Déterminons l'expression de OA_{n+1} :
$$OA_{n+1} = \sqrt{{x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2}$$
$$= \sqrt{\left(0{,}8\cdot x_n - 0{,}6\cdot y_n\right)^2 + \left(0{,}6\cdot x_n + 0{,}8\cdot y_n\right)^2}$$
$$= \sqrt{0{,}64x_n^2 - 0{,}96x_n y_n + 0{,}36y_n^2 + 0{,}36x_n^2 + 0{,}96x_n y_n + 0{,}64y_n^2}$$
$$= \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2} = 5$$
La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Correction 2

1. a. Voici les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$:

- $u_0 = 2$
- $u_1 = \frac{2}{3}\cdot u_0 + \frac{1}{3}\times 0 + 1 = \frac{2}{3}\times 2 + 0 + 1$
  $= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$
- $u_2 = \frac{2}{3}\cdot u_1 + \frac{1}{3}\times 1 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1$
  $= \frac{14}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9} = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$
- $u_3 = \frac{2}{3}\cdot u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1$
  $= \frac{52}{27} + \frac{18}{27} + \frac{27}{27} = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$
- $u_4 = \frac{2}{3}\cdot u_3 + \frac{1}{3}\times 3 + 1 = \frac{2}{3}\times\frac{97}{27} + 1 + 1$
  $= \frac{194}{81} + 2 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$

b. On peut conjecturer que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante.

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \leqslant n+3$" pour tout $n \in \mathbb{N}$

Démontrons cette propriété à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

- **Initialisation :**

On a les deux valeurs :
$u_0 = 2$; $n+3 = 0+3 = 3$

On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$$u_n \leqslant n+3$$
Partons de la comparaison :
$$u_n \leqslant n+3$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{2}{3}\cdot(n+3)$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{2}{3}\cdot n + \frac{2}{3}\times 3$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{2}{3}\cdot n + 2$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n \leqslant \frac{2}{3}\cdot n + 2 + \frac{1}{3}\cdot n$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n \leqslant n + 2$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + 1 \leqslant n + 2 + 1$$
$$\frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + 1 \leqslant (n+1) + 2$$
$$u_{n+1} \leqslant (n+1) + 2 \leqslant (n+1) + 3$$
$$u_{n+1} \leqslant (n+1) + 3$$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on a montré que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + 1\right) - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + \frac{1}{3}\times 3 = \frac{1}{3}\cdot\left(n + 3 - u_n\right)$$

c. En partant de la comparaison obtenue à la question 2. a., on a :
$$u_n \leqslant n+3$$
$$0 \leqslant n + 3 - u_n$$
$$0 \leqslant \frac{1}{3}\cdot\left(n+3-u_n\right)$$
D'après la question précédente :
$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n$$
$$u_n \leqslant u_{n+1}$$
Cette relation étant vraie pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

