Exercice 1

On définit :

- la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- la suite (S_n), pour tout entier naturel n, par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par : $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a :
$$u_0 = 13 \quad ; \quad 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + \frac{12}{1} = 13$$
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$
Par la définition de la suite (u_n), on a la relation :
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Big(1 + \frac{12}{5^n}\Big) + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$
La relation précédente montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
La propriété est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonnement par récurrence montre que cette propriété pour tout entier naturel n.

2. a. On a :
$$S_{n+1} - S_n = \big(u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1}\big) - \big(u_0 + \cdots + u_n\big)$$
$$= u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^n} > 0$$
La suite (S_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. La somme S_n admet l'écriture suivante :
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
$$= \Big(1 + \frac{12}{5^0}\Big) + \Big(1 + \frac{12}{5^1}\Big) + \cdots + \Big(1 + \frac{12}{5^{n-1}}\Big) + \Big(1 + \frac{12}{5^n}\Big)$$
$$= 1\cdot n + \frac{12}{5^0} + \frac{12}{5^1} + \cdots + \frac{12}{5^{n-1}} + \frac{12}{5^n}$$
$$= n + \underbrace{12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^0 + 12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^1 + \cdots + 12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n}_{S'_n}$$
La suite S'_n est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $\frac{1}{5}$; ainsi, S'_n a pour valeur :
$$S'_n = 12\cdot\frac{1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n}{1 - \frac{1}{5}} = 12\cdot\frac{1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n}{\frac{4}{5}}$$
$$= \frac{5}{4}\times 12\cdot\Big[1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big] = 15\cdot\Big[1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big]$$
Ainsi, la somme S_n admet pour écriture :
$$S_n = n + 15\cdot\Big[1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big]$$

c. On a l'encadrement $0 < \frac{1}{5} < 1$ qui permet d'obtenir la limite suivante : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 0$

Ainsi, la suite (S_n) admet la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \lim_{n\mapsto+\infty} n + 15\cdot\Big[1 - \Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big] = +\infty$$