Tle spé

LIMITE D'UNE SUITE
7 EXERCICES POUR RÉVISER : CORRECTION

Les énoncés sont disponibles ici : https://www.mathemathieu.fr/tsm-ls-7exorev.

EXERCICE 1

1. $80\,\text{m}^3=80\,000\,\text{L}$ donc $u_0=80\,000$.

La quantité de lait est réduite de 5 % chaque année, donc on a : $u_{n+1}=\left(1-\frac{5}{100}\right)u_n=0{,}95\,u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison 0,95.

On a donc, pour tout entier naturel n : $u_n=80\,000\times 0{,}95^n$.

2. Le nombre de litres de lait commercialisés en 2020 est u_{15}.

$u_{15}=80\,000\times 0{,}95^{15}\approx 37\,063$ donc environ $37\,063$ litres de lait devront être commercialisés en 2020.

3. $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{15}=u_0\dfrac{1-0{,}95^{16}}{1-0{,}95}=80\,000\times\dfrac{1-0{,}95^{16}}{0{,}05}\approx 895\,797$

donc environ $895\,797$ litres de lait seront commercialisés entre 2005 et 2020.

EXERCICE 2

1. a) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k=\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^n$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{\frac{9}{10}}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

b) $$v_n=0,\underbrace{777\ldots7}_{n\text{ chiffres}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{10^k}=7\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}$$

$$=7\times\frac{1}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{7}{9}\times\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

2. Lorsque n tend vers l'infini, 10^n tend vers l'infini, donc $\dfrac{1}{10^n}$ tend vers 0.

Par conséquent, v_n devrait tendre vers $\dfrac{7}{9}$.

On a donc $0{,}777\ldots=\dfrac{7}{9}$.

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}-v_n=\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}=...(\text{à faire})=\frac{n2^n}{(n+1)(n+2)}$.

Or $n\geqslant 0$ et $2^n>0$ et $n+2>n+1>0$ donc on a $v_{n+1}-v_n\geqslant 0$.

Conclusion : (v_n) est croissante.

EXERCICE 4

1. $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n=\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^2-\left(\frac{n}{n+2}\right)^2$ $=\dots$ *(à faire)*

$$=\frac{(n+1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)}\times\frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

Or, les deux dénominateurs et les deux numérateurs sont strictement positifs donc $v_{n+1}-v_n>0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.

2. $\sum_{k=1}^{97}(5k-3)$ est la somme des 97 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme -3 donc : $\sum_{k=1}^{97}(5k-3)$ $=97\times\frac{5\times1-3+5\times97-3}{2}$ $=97\times\frac{484}{2}=23\,474$.

EXERCICE 5

1. a) On a $u_0=3$ et, à l'aide de la calculatrice :

$u_1=2$	$u_4\approx 1{,}52$	$u_7\approx 1{,}50$
$u_2\approx 1{,}67$	$u_5\approx 1{,}51$	$u_8\approx 1{,}50$
$u_3\approx 1{,}56$	$u_6\approx 1{,}50$	$u_9\approx 1{,}50$

b) La suite (u_n) semble décroissante.

2. Première méthode

Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n=u_n-\frac{3}{2}$.

a) $\forall n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}u_n+1-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}u_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(u_n-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ avec $v_0=u_0-\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$, *ie* $v_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ avec $0<\frac{1}{3}<1$, donc (v_n) est strictement décroissante.

c) $v_n=u_n-\frac{3}{2}$ donc $u_n=v_n+\frac{3}{2}$. Alors, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}+\frac{3}{2}-v_n-\frac{3}{2}=v_{n+1}-v_n$.

d'où, puisque (v_n) est strictement décroissante, $u_{n+1}-u_n<0$ *ie* $u_{n+1}<u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

3. Deuxième méthode

a) $u_{n+1}\leqslant u_n \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n+1\leqslant u_n \quad \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n-u_n\leqslant -1 \quad \Leftrightarrow -\frac{2}{3}u_n\leqslant -1 \quad \Leftrightarrow u_n\geqslant -1\times\left(-\frac{3}{2}\right) \quad \Leftrightarrow u_n\geqslant\frac{3}{2}$

donc $u_{n+1}\leqslant u_n\Leftrightarrow u_n\geqslant\frac{3}{2}$

b) On note $\mathrm{P}(n)$: « $u_n\geqslant\frac{3}{2}$ ».

<u>Initialisation</u>

$u_0=3$ et $3\geqslant\frac{3}{2}$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$ (fixé). On suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie : $u_n\geqslant\frac{3}{2}$.

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1}\geqslant\frac{3}{2}$.

$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1$ donc $u_{n+1}\geqslant\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}+1$ *ie* $u_{n+1}\geqslant\frac{3}{2}$.

<u>Conclusion</u>

Donc, d'après le raisonnement par récurrence : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant\frac{3}{2}$.

c) On vient de démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n\geqslant\frac{3}{2}$.

Donc, d'après la question 3.a), on a : $u_{n+1}\leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

EXERCICE 6

1. Dans le menu RECUR de la calculatrice CASIO, on rentre la suite (u_n) et on cherche u_{10}. On trouve $u_{10}\approx 69\,355$. Donc on peut conjecturer le nombre d'habitant en 2025 : $69\,355$ milliers.

2. a) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+8\,250=1{,}004\,u_n+33+8\,250=1{,}004\,u_n+8\,283=1{,}004\left(u_n+\frac{8\,283}{1{,}004}\right)=1{,}004\,(u_n+8\,250)=1{,}004\,v_n\,.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 1,004 et de premier terme $v_0=u_0+8\,250=66\,318+8\,250=74\,568$.

Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times 1{,}004^n$ ie $v_n=74\,568\times 1{,}004^n$.

b) $u_n=v_n-8\,250$ donc $u_n=74\,568\times 1{,}004^n-8\,250$.

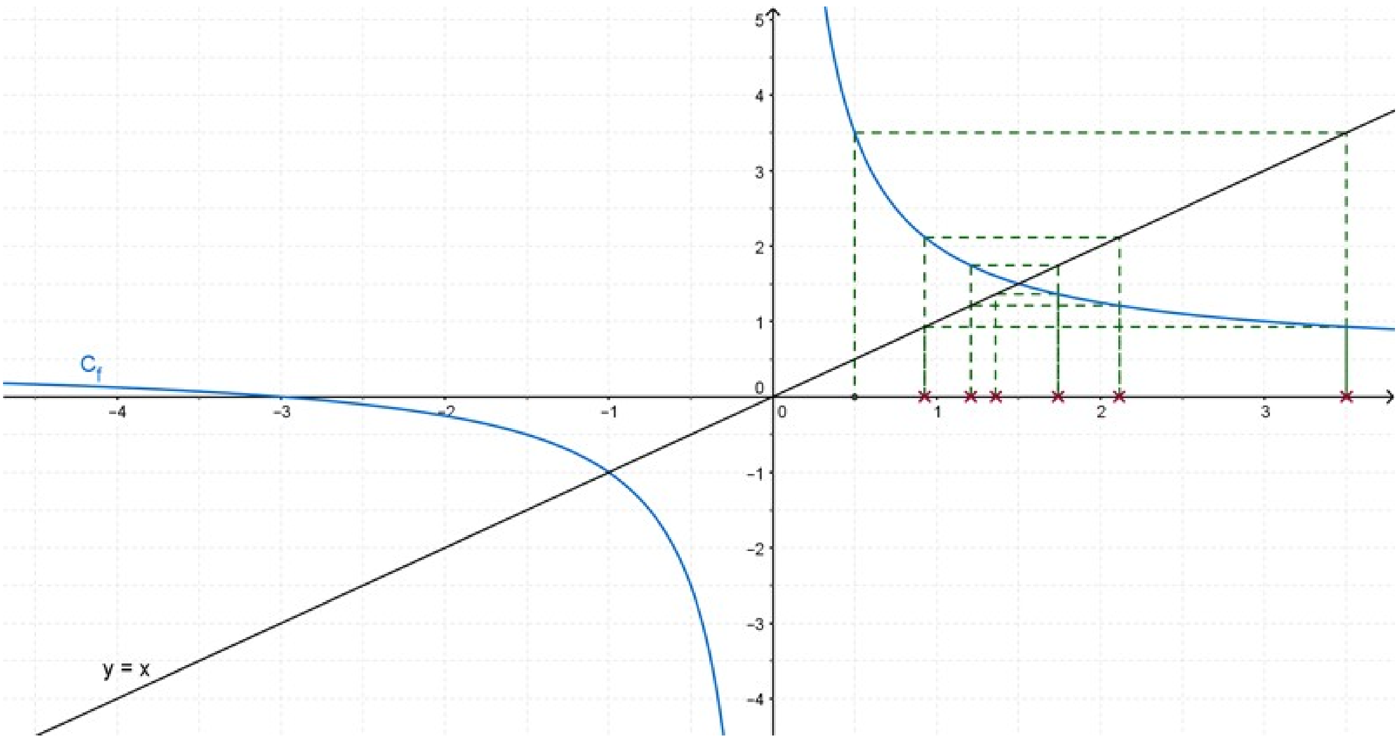
On a alors : $u_{45}=74\,568\times 1{,}004^{45}-8\,250$ soit $u_{45}\approx 80\,992$.

Le nombre d'habitants en France en 2060 serait alors d'environ 80 992 000.

EXERCICE 7

1. voir page suivante

2. a) $u_1=\dfrac{u_0+3}{2u_0}=\dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{2}$ et $u_2=\dfrac{u_1+3}{2u_1}=\dfrac{\frac{7}{2}+3}{2\times\frac{7}{2}}=\dfrac{\frac{13}{2}}{7}=\dfrac{13}{14}$.



2. b) • $u_1-u_0=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$ et $u_2-u_1=\frac{13}{14}-\frac{7}{2}=-\frac{18}{7}$ donc $u_1-u_0\neq u_2-u_1$: (u_n) n'est pas arithmétique.

• $\frac{u_1}{u_0}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}=7$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{\frac{13}{14}}{\frac{7}{2}}=\frac{13}{14}\times\frac{2}{7}=\frac{13}{49}$ donc $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$: (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{u_n+3}{2u_n}+1}{\frac{u_n+3}{2u_n}-\frac{3}{2}}=\frac{u_n+3+2u_n}{u_n+3-3u_n}=\frac{3u_n+3}{-2u_n+3}=\frac{3(u_n+1)}{-2\left(u_n-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{3}{2}v_n$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ avec $v_0=\frac{u_0+1}{u_0-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{-1}=-\frac{3}{2}$

c'est-à-dire $v_n=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ou encore $v_n=\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

c) $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-\frac{3}{2}}$ donc : $v_n\left(u_n-\frac{3}{2}\right)=u_n+1$ *ie* $v_nu_n-\frac{3}{2}v_n-1=u_n$ *ie* $-\frac{3}{2}v_n-1=u_n(1-v_n)$

d'où $\frac{-\frac{3}{2}v_n-1}{1-v_n}=u_n$ car $v_n\neq 1$. En effet : $v_n=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}=1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}=1$ ou $n+1=0$.

Finalement : $u_n=\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$ ou encore $u_n=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}=-\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}$.